Brüche addieren und subtrahieren – Zusatz- und Expertenaufgaben

Knobelaufgaben, Transfer und Vertiefung für schnelle Rechner – Mathematik Klasse 6

Diese Aufgaben sind ZUSATZAUFGABEN für alle, die mit dem Arbeitsblatt schon fertig sind. Sie sind deutlich anspruchsvoller: Du musst Wissen über Brüche auf neue Situationen anwenden, selbst Zusammenhänge entdecken, begründen und manchmal etwas knobeln. Bearbeite sie in Ruhe – es gibt keinen Zeitdruck, aber viel zu entdecken!

1 Profi-Rechnungen: Hier müssen teils drei Brüche nacheinander addiert bzw. subtrahiert werden. Bestimme jeweils den Hauptnenner aller beteiligten Brüche und kürze am Ende vollständig.

a) 1/2 + 1/3 + 1/6 = _____

b) 3/4 - 1/3 + 1/6 = _____

c) 5/6 - 1/4 - 1/12 = _____

d) 2/3 + 1/9 - 1/6 = _____

e) 1/5 + 1/4 + 3/10 = _____

f) 7/10 - 2/5 + 1/2 = _____

2 Finde zwei verschiedene Brüche a/b und c/d, deren Summe genau 7/12 ergibt. Die Brüche dürfen nicht gleichnamig sein (also unterschiedliche Nenner haben) und keiner der beiden Brüche darf 0 sein.

a) Finde ein erstes Paar.

b) Finde ein zweites, verschiedenes Paar.

c) Erkläre dein Vorgehen: Wie bist du systematisch auf passende Brüche gekommen?

3 Drei Freunde teilen sich eine Pizza. Paul isst 2/6 der Pizza, Lena isst 1/3 der Pizza und Max isst den Rest.

a) Zeige, dass Paul und Lena eigentlich denselben Bruchteil gegessen haben, obwohl die Brüche unterschiedlich aussehen.

b) Welchen Bruchteil der Pizza isst Max? Kürze vollständig.

c) Die drei wollen beim nächsten Mal eine Pizza so aufteilen, dass jeder einen ANDEREN Bruchteil bekommt, aber alle drei Bruchteile zusammen wieder genau 1 ganze Pizza ergeben, und die drei Bruchteile sollen verschiedene Nenner haben, von denen keiner 3 oder 6 ist. Finde ein passendes Beispiel und beweise rechnerisch, dass die Summe 1 ergibt.

4 Knobelaufgabe – Stammbrüche: Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1, z. B. 1/2, 1/3, 1/5.

a) Zeige rechnerisch, dass 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 genau 1 ergibt.

b) Die alten Ägypter schrieben Brüche meist als Summe verschiedener Stammbrüche. Schreibe den Bruch 5/6 als Summe von zwei verschiedenen Stammbrüchen.

c) Begründe, warum es für 5/6 nicht funktioniert, ihn als Summe von zwei GLEICHEN Stammbrüchen zu schreiben.

5 Bewerten und Begründen: Ein Mitschüler behauptet: „Wenn man zwei Brüche addiert, wird das Ergebnis immer größer als beide Ausgangsbrüche.“

a) Finde ein Beispiel, das diese Behauptung bestätigt.

b) Prüfe, ob die Behauptung auch bei der Subtraktion von Brüchen gelten kann, oder ob sie dort widerlegt wird. Nutze ein Beispiel.

c) Nimm begründet Stellung dazu, ob die Behauptung des Mitschülers für die ADDITION zweier positiver Brüche immer stimmt. Begründe allgemein, warum das so ist.

6 Rückwärts gedacht: Hier ist jeweils das Ergebnis und ein Bruch gegeben. Finde den fehlenden zweiten Bruch, der addiert bzw. subtrahiert werden muss. Gib den fehlenden Bruch vollständig gekürzt an.

a) 1/4 + ? = 3/4

b) ? - 1/6 = 1/2

c) 5/9 + ? = 1

d) 7/8 - ? = 1/4

e) ? + 2/5 = 9/10

f) 3/4 - ? = 1/12

7 Fortgeschrittene Aussagen zu Brüchen – prüfe sorgfältig, ob sie wahr oder falsch sind.

	richtig	falsch
Für alle positiven Brüche a/b und c/d gilt: Der Hauptnenner ist nie größer als das Produkt b·d.	☐	☐
Die Summe 1/n + 1/(n+1) ist für jede natürliche Zahl n ≥ 1 größer als 1.	☐	☐
Wenn zwei Brüche denselben Wert haben (z. B. 2/4 und 1/2), führt die Addition mit einem dritten Bruch in beiden Fällen zum selben Ergebnis.	☐	☐
Der Hauptnenner zweier teilerfremder Zahlen (z. B. 5 und 8) ist immer gleich ihrem Produkt.	☐	☐
Subtrahiert man von 1 den Bruch 1/n, so wird das Ergebnis für größer werdendes n immer kleiner.	☐	☐

8 Forscherauftrag – Muster entdecken: Berechne der Reihe nach:

1/1 − 1/2

1/2 − 1/3

1/3 − 1/4

1/4 − 1/5

a) Berechne alle vier Differenzen und kürze jeweils vollständig.

b) Beschreibe das Muster, das du bei den Ergebnissen erkennst.

c) Stelle eine Vermutung auf, wie die Differenz 1/n − 1/(n+1) allgemein (mit Buchstaben statt Zahlen) lauten müsste, und überprüfe deine Vermutung für n = 6.

Lösungen

Brüche addieren und subtrahieren – Zusatz- und Expertenaufgaben · Mathematik · Klasse 6

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/bruchrechnung-klasse-6 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: a) 6/6 = 1, b) 7/12, c) 6/12 = 1/2, d) 11/18, e) 15/20 = 3/4, f) 4/5

Aufgabe 2: Es gibt viele richtige Lösungen. Beispiele:
a) 1/4 + 1/3 = 3/12 + 4/12 = 7/12.
b) 1/2 + 1/12 = 6/12 + 1/12 = 7/12 (oder z. B. 1/6 + 5/12 = 2/12 + 5/12 = 7/12).
c) Vorgehen: Man wählt zuerst einen Nenner, der ein Teiler von 12 ist (z. B. 2, 3, 4, 6), rechnet den passenden Zähler über den Hauptnenner 12 aus und bestimmt dann durch Subtraktion, welcher Bruch noch fehlt, damit die Summe 7/12 ergibt. Anschließend prüft man, ob sich dieser Rest-Bruch kürzen lässt bzw. welchen Nenner er hat, damit beide Brüche wirklich ungleichnamig sind.

Aufgabe 3: a) 2/6 lässt sich kürzen: 2/6 = 1/3 (Zähler und Nenner durch 2 teilen). Damit ist 2/6 derselbe Bruchteil wie 1/3 – Paul und Lena haben also gleich viel gegessen.
b) Paul und Lena zusammen haben 1/3 + 1/3 = 2/3 gegessen. Die ganze Pizza ist 3/3. Max bekommt also 3/3 − 2/3 = 1/3 der Pizza.
c) Beispiellösung: 1/2 + 1/5 + 3/10. Hauptnenner ist 10: 1/2 = 5/10, 1/5 = 2/10, 3/10 bleibt. Summe: 5/10 + 2/10 + 3/10 = 10/10 = 1. Die drei Nenner (2, 5, 10) sind verschieden von 6 und 3, und die Summe ergibt tatsächlich eine ganze Pizza.

Aufgabe 4: a) Hauptnenner von 2, 3, 7, 42 ist 42. 1/2 = 21/42, 1/3 = 14/42, 1/7 = 6/42, 1/42 bleibt. Summe: 21/42 + 14/42 + 6/42 + 1/42 = 42/42 = 1. Die Summe ergibt tatsächlich genau 1.
b) 5/6 = 1/2 + 1/3, denn 1/2 = 3/6 und 1/3 = 2/6, also 3/6 + 2/6 = 5/6.
c) Zwei gleiche Stammbrüche addiert ergeben immer 2/n (also einen Bruch mit Zähler 2). Damit das 5/6 ergibt, müsste 2/n = 5/6 gelten, also n = 12/5 = 2,4. Das ist keine ganze Zahl, also gibt es keinen Nenner n, für den zwei gleiche Stammbrüche 1/n + 1/n genau 5/6 ergeben.

Aufgabe 5: a) Beispiel: 1/4 + 1/2 = 1/4 + 2/4 = 3/4. Das Ergebnis 3/4 ist größer als 1/4 und größer als 1/2 (= 2/4).
b) Bei der Subtraktion stimmt die Behauptung nicht: Zum Beispiel 3/4 − 1/2 = 1/4. Das Ergebnis 1/4 ist kleiner als der erste Bruch 3/4 (und kleiner als 1/2). Die Behauptung wird hier also widerlegt.
c) Für die Addition zweier positiver Brüche stimmt die Behauptung tatsächlich immer: Addiert man zu einer positiven Zahl eine weitere positive Zahl, wird die Summe immer größer als jeder der beiden Summanden, da man ja etwas „dazugibt“ und nichts wegnimmt. Das gilt für Brüche genauso wie für natürliche Zahlen, solange beide Brüche positiv sind (also größer als 0).

Aufgabe 6: a) 2/4 = 1/2, b) 2/3, c) 4/9, d) 5/8, e) 1/2, f) 2/3

Aufgabe 7: Für alle positiven Brüche a/b und c/d gilt: Der Hauptnenner ist nie größer als das Produkt b·d. → **richtig**
Die Summe 1/n + 1/(n+1) ist für jede natürliche Zahl n ≥ 1 größer als 1. → **falsch**
Wenn zwei Brüche denselben Wert haben (z. B. 2/4 und 1/2), führt die Addition mit einem dritten Bruch in beiden Fällen zum selben Ergebnis. → **richtig**
Der Hauptnenner zweier teilerfremder Zahlen (z. B. 5 und 8) ist immer gleich ihrem Produkt. → **richtig**
Subtrahiert man von 1 den Bruch 1/n, so wird das Ergebnis für größer werdendes n immer kleiner. → **falsch**

Aufgabe 8: a) 1/1 − 1/2 = 2/2 − 1/2 = 1/2. 1/2 − 1/3 = 3/6 − 2/6 = 1/6. 1/3 − 1/4 = 4/12 − 3/12 = 1/12. 1/4 − 1/5 = 5/20 − 4/20 = 1/20.
b) Man erkennt: Die Ergebnisse sind jeweils Stammbrüche (Zähler 1), und die Nenner sind 2, 6, 12, 20 – das sind genau die Produkte aus den beiden ursprünglichen Nennern (1·2=2, 2·3=6, 3·4=12, 4·5=20).
c) Vermutung: 1/n − 1/(n+1) = 1/(n·(n+1)). Überprüfung für n = 6: 1/6 − 1/7 = 7/42 − 6/42 = 1/42. Und n·(n+1) = 6·7 = 42. Die Vermutung stimmt also auch für n = 6.