Lineare Gleichungen lösen – Zusatz- und Expertenaufgaben

Transfer, Knobelaufgaben und Vertiefung für schnelle Tüftler – Mathematik, Klasse 7

Diese Aufgaben sind Zusatzfutter für alle, die mit dem Arbeitsblatt bereits fertig sind. Es geht jetzt nicht mehr nur ums Lösen von Standardgleichungen, sondern ums genaue Begründen, Übertragen auf neue Situationen, Knobeln und kritische Bewertung von Lösungswegen. Nimm dir Zeit zum Nachdenken – hier zählt nicht Schnelligkeit, sondern Tiefe.

1 Betrachte die Gleichung $(x+3)/2 = (2x-1)/3$. Löse sie, indem du zunächst beide Seiten mit dem Hauptnenner multiplizierst. Erkläre außerdem, warum diese Umformung eine Äquivalenzumformung ist und keine neuen Lösungen erzeugt oder welche verliert.

2 Für welchen Wert des Parameters a hat die Gleichung $a \cdot x + 6 = 2x + 12$ unendlich viele Lösungen? Für welchen Wert von a hat sie keine Lösung? Begründe beide Fälle mathematisch.

3 Drei Geschwister teilen sich eine Erbschaft. Der mittlere Erbe bekommt doppelt so viel wie der jüngste, der älteste bekommt 300 Euro mehr als der mittlere. Zusammen erben sie 2700 Euro. Stelle eine Gleichung mit einer Variablen auf, löse sie und überprüfe dein Ergebnis durch eine vollständige Probe mit allen drei Beträgen.

4 Zwei Züge fahren sich mit konstanter Geschwindigkeit entgegen. Zug A startet in Stadt X mit 80 km/h, Zug B startet gleichzeitig in Stadt Y mit 100 km/h. Die Entfernung zwischen den Städten beträgt 360 km. Stelle eine lineare Gleichung auf, mit der du berechnen kannst, nach welcher Zeit t (in Stunden) sich die Züge treffen. Löse die Gleichung und gib die Zeit sowie die von jedem Zug zurückgelegte Strecke an.

5 Ein Mitschüler behauptet: „Wenn ich eine Gleichung löse und am Ende etwas Falsches wie 5 = 7 herauskommt, habe ich mich bestimmt nur verrechnet.“ Bewerte diese Aussage kritisch. Nenne ein konkretes Beispiel für eine Gleichung, bei der ein solches Ergebnis entstehen kann, ohne dass ein Rechenfehler vorliegt, und erkläre, was das Ergebnis dann bedeutet.

6 Löse die folgenden anspruchsvolleren Gleichungen. Achte besonders auf Klammern, Brüche und Terme mit der Variablen auf beiden Seiten. Notiere jeden Umformungsschritt.

a) $2(3x - 1) - 4 = 5(x + 2)$ → _____

b) $(x + 4)/3 - 2 = x/6$ → _____

c) $7 - 2(x - 3) = 3(2 - x) + 5$ → _____

d) $5(2x - 3) + 4x = 3(x + 7) - 2$ → _____

7 Kreuze an, ob die Aussage über Gleichungen und ihre Lösungsmengen wahr oder falsch ist. Begründe dir im Kopf jede Antwort.

	richtig	falsch
Die Gleichung $3x + 1 = 3x + 1$ besitzt genau eine Lösung.	☐	☐
Die Gleichung $3(x+1) = 3x + 3$ ist für jede reelle Zahl x erfüllt.	☐	☐
Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit einer Variablen, bleibt die Lösungsmenge immer unverändert.	☐	☐
Eine Gleichung der Form $ax = b$ mit $a = 0$ und $b \neq 0$ hat keine Lösung.	☐	☐
Wenn man bei einer Äquivalenzumformung durch einen Term dividiert, der die Variable enthält, kann man dabei Lösungen verlieren.	☐	☐
Die Gleichung $x^2 = 4$ ist eine lineare Gleichung.	☐	☐

8 Finde selbst eine lineare Gleichung der Form $ax + b = cx + d$ (mit a, b, c, d als ganze Zahlen, $a \neq c$), deren Lösung genau $x = -3$ ist. Zeige durch Rechnung, dass deine Gleichung tatsächlich diese Lösung hat, und erkläre dein Vorgehen bei der Konstruktion.

9 Ein Wasserbecken wird durch zwei Zuläufe gefüllt. Zulauf A füllt allein in 6 Stunden das ganze Becken, Zulauf B allein in 4 Stunden. Wie lange dauert es, bis das Becken voll ist, wenn beide Zuläufe gleichzeitig geöffnet werden? Stelle eine Gleichung mit der Füllrate auf und löse sie. Runde dein Ergebnis auf zwei Nachkommastellen in Stunden.

Lösungen

Lineare Gleichungen lösen – Zusatz- und Expertenaufgaben · Mathematik · Klasse 7

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/gleichungen-loesen-klasse-7 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: Hauptnenner ist 6. Multiplikation beider Seiten mit 6: 6·(x+3)/2 = 6·(2x-1)/3, also 3(x+3) = 2(2x-1). Ausmultiplizieren: 3x + 9 = 4x - 2 | -3x → 9 = x - 2 | +2 → x = 11. Probe: links (11+3)/2 = 14/2 = 7, rechts (22-1)/3 = 21/3 = 7. Stimmt überein. Die Multiplikation mit einer Zahl ungleich 0 (hier 6) ist eine Äquivalenzumformung, weil sie umkehrbar ist – man kann anschließend wieder durch 6 teilen und erhält die ursprüngliche Gleichung zurück. Da 6 ≠ 0, ändert sich die Lösungsmenge dabei nicht.

Aufgabe 2: Gleichung umformen: a·x + 6 = 2x + 12 | -6, -2x → (a-2)x = 6. Fall 1 (unendlich viele Lösungen): Das tritt ein, wenn die Gleichung für jedes x erfüllt ist, also wenn (a-2)x = 6 zu 0 = 0 wird. Das geht nur, wenn a - 2 = 0 UND gleichzeitig 6 = 0 gilt – das ist aber nie der Fall, da 6 ≠ 0. Es gibt also keinen Wert von a, für den unendlich viele Lösungen entstehen. Fall 2 (keine Lösung): Wenn a - 2 = 0, also a = 2, dann steht da 0·x = 6, was nie erfüllt sein kann, egal welches x man einsetzt. Für a = 2 gibt es also keine Lösung. Für alle anderen a (a ≠ 2) gibt es genau eine Lösung x = 6/(a-2).

Aufgabe 3: Sei x der Anteil des jüngsten Erben. Der mittlere bekommt 2x, der älteste bekommt 2x + 300. Gleichung: x + 2x + (2x + 300) = 2700. Zusammenfassen: 5x + 300 = 2700 | -300 → 5x = 2400 | :5 → x = 480. Der jüngste erbt 480 Euro, der mittlere 2·480 = 960 Euro, der älteste 960 + 300 = 1260 Euro. Probe: 480 + 960 + 1260 = 2700 Euro (stimmt). Außerdem: 960 ist doppelt so viel wie 480 (stimmt), und 1260 ist 300 mehr als 960 (stimmt).

Aufgabe 4: Die von den Zügen zurückgelegten Strecken zusammen müssen 360 km ergeben, wenn sie sich treffen. Gleichung: 80t + 100t = 360. Zusammenfassen: 180t = 360 | :180 → t = 2. Die Züge treffen sich nach 2 Stunden. Zug A legt in dieser Zeit 80 · 2 = 160 km zurück, Zug B legt 100 · 2 = 200 km zurück. Probe: 160 + 200 = 360 km, das entspricht genau der Entfernung zwischen den Städten.

Aufgabe 5: Die Aussage ist nicht richtig. Ein Ergebnis wie 5 = 7 (eine falsche Zahlenaussage ohne Variable) kann auch bei vollkommen korrekter Rechnung entstehen – dann bedeutet es, dass die ursprüngliche Gleichung keine Lösung hat, also die Lösungsmenge leer ist. Beispiel: 2x + 5 = 2x + 7. Subtrahiert man auf beiden Seiten 2x, erhält man 5 = 7. Das ist offensichtlich falsch, aber kein Rechenfehler – es zeigt vielmehr, dass es keine Zahl x gibt, die diese Gleichung erfüllt, da sich x komplett heraushebt und eine widersprüchliche Aussage übrig bleibt.

Aufgabe 6: a) x = 16, b) x = 4, c) x = 2, d) x = 2

Aufgabe 7: Die Gleichung 3x + 1 = 3x + 1 besitzt genau eine Lösung. → **falsch**
Die Gleichung 3(x+1) = 3x + 3 ist für jede reelle Zahl x erfüllt. → **richtig**
Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit einer Variablen, bleibt die Lösungsmenge immer unverändert. → **falsch**
Eine Gleichung der Form ax = b mit a = 0 und b ≠ 0 hat keine Lösung. → **richtig**
Wenn man bei einer Äquivalenzumformung durch einen Term dividiert, der die Variable enthält, kann man dabei Lösungen verlieren. → **richtig**
Die Gleichung $x^2 = 4$ ist eine lineare Gleichung. → **falsch**

Aufgabe 8: Beispielvorgehen: Man wählt zuerst die Lösung x = -3 und baut die Gleichung rückwärts auf. Wähle z. B. a = 2, c = 5. Dann muss gelten: 2·(-3) + b = 5·(-3) + d, also -6 + b = -15 + d. Wählt man b = 4, folgt -6 + 4 = -2, also muss -15 + d = -2 sein, d.h. d = 13. Die Gleichung lautet damit: 2x + 4 = 5x + 13. Probe durch Einsetzen von x = -3: links 2·(-3)+4 = -6+4 = -2, rechts 5·(-3)+13 = -15+13 = -2. Beide Seiten stimmen überein, also ist x = -3 tatsächlich die Lösung. Man kann diese Methode nutzen, um beliebig viele passende Gleichungen zu konstruieren, indem man a, c und b frei wählt und d daraus berechnet.

Aufgabe 9: Zulauf A füllt pro Stunde 1/6 des Beckens, Zulauf B füllt pro Stunde 1/4 des Beckens. Gemeinsam füllen sie pro Stunde 1/6 + 1/4 des Beckens. Gesucht ist die Zeit t, nach der das Becken voll ist (1 ganzes Becken): t·(1/6 + 1/4) = 1. Hauptnenner von 6 und 4 ist 12: 1/6 = 2/12, 1/4 = 3/12, zusammen 5/12. Also: t · 5/12 = 1 | ·12/5 → t = 12/5 = 2,4 Stunden. Das Becken ist also nach 2,4 Stunden (= 2 Stunden und 24 Minuten) voll.