Integralrechnung: Stammfunktion und bestimmtes Integral

Gymnasium NRW, Jahrgangsstufe 12 | 90 Minuten

Bearbeite die folgenden Aufgaben zur Integralrechnung. Du darfst für Aufgaben 1–3 ohne Hilfsmittel arbeiten. Zeige deine Rechenschritte deutlich. Bei Aufgabe 4 und 5 kannst du ein Computeralgebrasystem nutzen, um deine Ergebnisse zu kontrollieren.

1 Bestimme die Stammfunktion F(x) der folgenden Funktionen. Schreibe deine Antwort in der Form F(x) = ... + C.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

b) $g(x) = 4e^x$

c) $h(x) = 1/x$ (für $x > 0$)

2 Bestimme die Stammfunktion F(x) der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

b) $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$

3 Berechne das bestimmte Integral. Schreibe den Rechenweg auf: Stammfunktion finden → Grenzen einsetzen → Differenz bilden.

$\int_1^3 (2x + 1)\,dx$

4 Berechne die folgenden bestimmten Integrale. Nutze den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

a) $\int_0^2 x^2\,dx =$ _____

b) $\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx =$ _____

c) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx =$ _____

d) $\int_2^5 (x^3 - 4x)\,dx =$ _____

5 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[-2, 2]$.

a) Bestimme die Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $[-2, 2]$.

b) Berechne das bestimmte Integral $\int_{-2}^2 (x^2 - 4)\,dx$. Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?

c) Berechne den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse. Hinweis: Nutze Beträge für Flächen unterhalb der x-Achse.

6 Gegeben sind folgende Integralwerte:

$\int_0^1 f(x)\,dx = 5$

$\int_1^3 f(x)\,dx = 8$

$\int_0^3 g(x)\,dx = 6$

Berechne unter Verwendung der Intervalladditivität und Linearität von Integralen:

a) $\int_0^3 f(x)\,dx$

b) $\int_0^3 (2f(x) - g(x))\,dx$

7 Ein Wassertank wird mit einer Zuflussrate von $r(t) = 5t$ Litern pro Minute gefüllt, wobei t die Zeit in Minuten ist.

a) Bestimme die Stammfunktion $R(t)$ der Zuflussrate.

b) Berechne die Gesamtmenge Wasser, die in den ersten 4 Minuten in den Tank fließt.

c) Interpretiere das Ergebnis im Kontext der Aufgabe.

8 Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit v(t) = 20 + 2t m/s, wobei t die Zeit in Sekunden ist.

a) Welche Strecke legt das Auto in den ersten 10 Sekunden zurück?

b) Erkläre, wie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hier angewendet wird.

⭐ ⭐ Bonus für Schnelle

9 ⭐ Bonus-Aufgabe 1 (Transfer): Gegeben ist die Funktion f(x) = e^x − 2x.

a) Bestimme die Stammfunktion F(x).

b) Berechne $\int_0^2 (e^x - 2x)\,dx$.

c) Für welche Werte von a ist $\int_0^a (e^x - 2x)\,dx = 0$? (Hinweis: Du kannst ein Computeralgebrasystem nutzen.)

10 ⭐ Bonus-Aufgabe 2 (Knobeln): Ein Behälter wird mit Wasser gefüllt. Die Zuflussrate beträgt $r(t) = 10 - t$ Liter pro Minute für $0 \leq t \leq 10$. Nach $t = 10$ Minuten stoppt der Zufluss.

a) Berechne die Gesamtmenge Wasser, die in den Behälter fließt.

b) Zu welchem Zeitpunkt t ist die Zuflussrate am größten? Erkläre dein Ergebnis.

c) Wann wäre der Behälter leer, wenn ab $t = 10$ Minuten Wasser mit einer konstanten Rate von 0,5 Liter pro Minute abfließt? (Hinweis: Berechne zunächst die Wassermenge nach 10 Minuten.)

Lösungen

Integralrechnung: Stammfunktion und bestimmtes Integral · Mathematik · Klasse 12

Aufgabe 1: a) $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + C$

Begründung: Wende die Potenzregel $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C$ an.

$\int 3x^2\,dx = 3 \cdot x^3/3 = x^3$

$\int 2x\,dx = 2 \cdot x^2/2 = x^2$

$\int (-5)\,dx = -5x$

Zusammengefasst: $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + C$

b) $G(x) = 4e^x + C$

Begründung: Die Stammfunktion von e^x ist e^x selbst.

$\int 4e^x\,dx = 4 \cdot e^x = 4e^x + C$

c) $H(x) = \ln|x| + C$ (oder $\ln(x) + C$ für $x > 0$)

Begründung: Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Stammfunktion von $1/x$.

$\int (1/x)\,dx = \ln|x| + C$

Aufgabe 2: a) $F(x) = x^5/5 - x^3 + 2x + C$

Begründung: Wende die Potenzregel auf jeden Term an.

$\int x^4\,dx = x^5/5$

$\int (-3x^2)\,dx = -3 \cdot x^3/3 = -x^3$

$\int 2\,dx = 2x$

Zusammengefasst: $F(x) = x^5/5 - x^3 + 2x + C$

b) $G(x) = -\cos(x) - \sin(x) + C$

Begründung: Stammfunktion von $\sin(x)$ ist $-\cos(x)$, Stammfunktion von $\cos(x)$ ist $\sin(x)$.

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$

$\int (-\cos(x))\,dx = -\sin(x)$

Zusammengefasst: $G(x) = -\cos(x) - \sin(x) + C$

Aufgabe 3: Schritt 1: Stammfunktion finden

$F(x) = x^2 + x$ (ohne +C bei bestimmtem Integral)

Schritt 2: Hauptsatz anwenden

$\int_1^3 (2x + 1)\,dx = [x^2 + x]_1^3 = F(3) - F(1)$

Schritt 3: Grenzen einsetzen

$F(3) = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$

$F(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

Schritt 4: Differenz bilden

$\int_1^3 (2x + 1)\,dx = 12 - 2 = 10$

Aufgabe 4: a) 8/3, b) 48, c) 1, d) 441/4 = 110,25

Aufgabe 5: a) Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$ oder $x = 2$

Die Nullstellen liegen an den Grenzen des Intervalls.

b) Stammfunktion: $F(x) = x^3/3 - 4x + C$

$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = [x^3/3 - 4x]_{-2}^{2}$

$= (2^3/3 - 4 \cdot 2) - ((-2)^3/3 - 4 \cdot (-2))$

$= (8/3 - 8) - (-8/3 + 8)$

$= (8/3 - 24/3) - (-8/3 + 24/3)$

$= (-16/3) - (16/3)$

$= -32/3 \approx -10{,}67$

Geometrische Bedeutung: Das Integral ist negativ, weil die Funktion im gesamten Intervall unterhalb der x-Achse liegt (zwischen $x = -2$ und $x = 2$ ist $f(x) \leq 0$). Das negative Vorzeichen zeigt die orientierte Fläche an.

c) Flächeninhalt: Da die gesamte Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ist der Flächeninhalt der Betrag des Integrals:

$A = \left|\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx\right| = |-32/3| = 32/3 \approx 10{,}67$ Flächeneinheiten

Aufgabe 6: a) Intervalladditivität: $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$

$\int_0^3 f(x)\,dx = 5 + 8 = 13$

b) Linearität: $\int_0^3 (2f(x) - g(x))\,dx = 2\int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^3 g(x)\,dx$

$= 2 \cdot 13 - 6$

$= 26 - 6$

$= 20$

Aufgabe 7: a) Stammfunktion der Zuflussrate:

$R(t) = \int 5t\,dt = 5 \cdot t^2/2 = 2{,}5t^2 + C$

(Die Integrationskonstante C entfällt, da wir die Menge ab $t = 0$ berechnen.)

b) Gesamtmenge Wasser in den ersten 4 Minuten:

$V = \int_0^4 5t\,dt = [2{,}5t^2]_0^4$

$= 2{,}5 \cdot 4^2 - 2{,}5 \cdot 0^2$

$= 2{,}5 \cdot 16 - 0$

$= 40$ Liter

c) Interpretation: In den ersten 4 Minuten fließen insgesamt 40 Liter Wasser in den Tank. Die Zuflussrate nimmt linear mit der Zeit zu ($r(t) = 5t$), daher fließt am Anfang weniger Wasser pro Minute, am Ende mehr. Das bestimmte Integral summiert alle diese Raten über die Zeit auf und ergibt die Gesamtmenge.

Aufgabe 8: a) Die Strecke ist das Integral der Geschwindigkeit:

$s = \int_0^{10} (20 + 2t)\, dt$

Stammfunktion: $F(t) = 20t + t^2 + C$

$s = [20t + t^2]_0^{10}$
$= (20 \cdot 10 + 10^2) - (20 \cdot 0 + 0^2)$
$= (200 + 100) - 0$
$= 300$ Meter

Das Auto legt in den ersten 10 Sekunden 300 Meter zurück.

b) Anwendung des Hauptsatzes:

Der Hauptsatz verbindet Ableitung und Integration: Wenn s(t) die Strecke ist, dann ist v(t) = s'(t) die Geschwindigkeit (Ableitung). Umgekehrt ist die Strecke das Integral der Geschwindigkeit: $s = \int v(t)\, dt$. Der Hauptsatz besagt, dass $\int_a^b v(t)\, dt = s(b) - s(a)$, also die Differenz der Strecke am Anfang und Ende des Zeitintervalls. Dies ermöglicht es uns, aus der bekannten Geschwindigkeitsfunktion die zurückgelegte Strecke zu berechnen.

Aufgabe 9: a) Stammfunktion:

$F(x) = e^x - x^2 + C$
Begründung: $\int e^x\, dx = e^x$ und $\int (-2x)\, dx = -x^2$

b) Bestimmtes Integral:

$\int_0^2 (e^x - 2x)\, dx = [e^x - x^2]_0^2$
$= (e^2 - 2^2) - (e^0 - 0^2)$
$= (e^2 - 4) - 1$
$= e^2 - 5$
$\approx 7{,}389 - 5 = 2{,}389$

c) Gesucht: a, sodass $\int_0^a (e^x - 2x)\, dx = 0$

$[e^x - x^2]_0^a = 0$
$(e^a - a^2) - (1 - 0) = 0$
$e^a - a^2 - 1 = 0$
$e^a = a^2 + 1$

Für $k(a) = e^a - a^2 - 1$ gilt $k(0) = 0$ und $k'(a) = e^a - 2a > 0$ für alle a (der Integrand $e^x - 2x$ ist überall positiv).

k ist also streng monoton steigend und hat nur die Nullstelle $a = 0$. Für $a > 0$ ist das Integral immer positiv.

Aufgabe 10: a) Gesamtmenge Wasser in 10 Minuten:

$V = \int_0^{10} (10 - t)\, dt$

$= [10t - t^2/2]_0^{10}$

$= (10 \cdot 10 - 10^2/2) - 0$

$= (100 - 50)$

$= 50$ Liter

b) Die Zuflussrate $r(t) = 10 - t$ ist eine lineare Funktion mit negativer Steigung.

Sie ist am größten bei $t = 0$: $r(0) = 10$ Liter/Minute

Sie nimmt kontinuierlich ab und erreicht $r(10) = 0$ Liter/Minute.

Erklärung: Die Zuflussrate ist eine fallende Funktion, daher ist sie am Anfang ($t = 0$) maximal.

c) Nach 10 Minuten sind 50 Liter im Behälter.

Abflussrate: 0,5 Liter/Minute

Zeit bis Behälter leer: $t = 50 / 0{,}5 = 100$ Minuten

Der Behälter ist 100 Minuten nach Beginn des Abflusses leer, also insgesamt 110 Minuten nach Beginn des Zuflusses.

Dieses Blatt für deine Klasse anpassen

Leichtere Fassung mit Hilfen, Zusatzaufgaben für Schnelle, als Word-Datei oder per QR-Code an die Klasse — kostenlos in Lehreule.

lehreule.de/arbeitsblatt/integralrechnung-klasse-12