Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Systematische Analyse von Extremstellen, Wendepunkten und Krümmungsverhalten

Bearbeite alle Aufgaben vollständig und dokumentiere deine Rechenschritte nachvollziehbar. Verwende die Fachbegriffe: Extremstelle, Wendestelle, linksgekrümmt, rechtsgekrümmt, Monotonie, Vielfachheit. Bearbeitungszeit: ca. 45 Minuten.

1 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$.

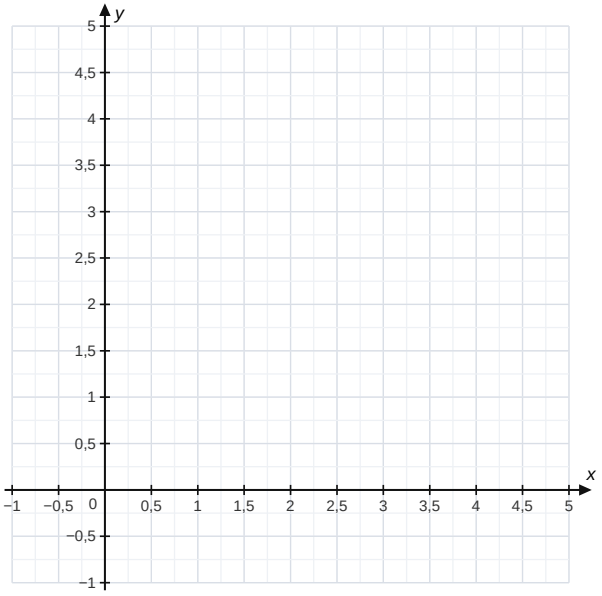
a) Berechne die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

b) Bestimme alle Nullstellen von f und gib ihre Vielfachheiten an.

2 Bestimme alle Extremstellen der Funktion $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$. Klassifiziere sie als lokale Maxima oder Minima und berechne die zugehörigen Funktionswerte.

3 Bestimme die Wendestelle(n) von $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$ und beschreibe das Krümmungsverhalten in den entstehenden Intervallen. Verwende die Begriffe „linksgekrümmt" und „rechtsgekrümmt".

4 Bestimme die Intervalle, in denen $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist. Nutze dafür die Extremstellen.



Koordinatensystem zur Skizze des Graphen von $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x$

5 Skizziere den Graphen von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ in das Koordinatensystem. Markiere und beschrifte alle charakteristischen Punkte (Nullstellen, Extrema, Wendepunkt). Zeichne den Graphen unter Berücksichtigung des Monotonie- und Krümmungsverhaltens.

6 Gegeben ist die Funktion $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$. Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch: Bestimme Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Extremstellen mit Funktionswerten, Wendestellen und Krümmungsverhalten.

7 Gegeben sind die Ableitungen einer ganzrationalen Funktion h:

- $h'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$
- $h''(x) = 6(x - 2)$

Bestimme die Extremstellen von h und klassifiziere sie. Gib die Wendestelle an. Erkläre, wie man aus dem Vorzeichenwechsel von h' die Art der Extrema bestimmt.

8 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$. Die Funktion hat an $x = 1$ einen Wendepunkt. Der Graph verläuft durch den Punkt $P(2 \mid 0)$. Bestimme die Parameter b und c.

9 Erkläre den Unterschied zwischen einer einfachen und einer doppelten Nullstelle einer ganzrationalen Funktion. Welche geometrische Bedeutung hat dieser Unterschied für den Graphen? Wie erkennst du die Vielfachheit einer Nullstelle mithilfe der Ableitungen?

Lösungen

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen · Mathematik · Klasse 12

Aufgabe 1: a) $f'(x) = 3x^2 – 12x + 9 = 3(x^2 – 4x + 3) = 3(x – 1)(x – 3)$

$f''(x) = 6x – 12 = 6(x – 2)$

b) Nullstellen von f:

$f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x = x(x^2 – 6x + 9) = x(x – 3)^2$

Nullstellen: $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle, Graph kreuzt x-Achse)

$x_2 = 3$ (doppelte Nullstelle, Graph berührt x-Achse)

Die doppelte Nullstelle bei $x = 3$ deutet auf ein lokales Extremum hin.

Aufgabe 2: Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$3(x – 1)(x – 3) = 0$

$x_1 = 1$ oder $x_2 = 3$

Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechsel von f'):

Für $x_1 = 1$:

- $f'(0) = 3(0 – 1)(0 – 3) = 3 \cdot (–1) \cdot (–3) = 9 > 0$ (f steigt)
- $f'(2) = 3(2 – 1)(2 – 3) = 3 \cdot 1 \cdot (–1) = –3 < 0$ (f fällt)

Vorzeichenwechsel von + zu –: lokales Maximum

$f(1) = 1 – 6 + 9 = 4$

Lokales Maximum: $P_1(1 \mid 4)$

Für $x_2 = 3$:

- $f'(2) = –3 < 0$ (f fällt)
- $f'(4) = 3(4 – 1)(4 – 3) = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 > 0$ (f steigt)

Vorzeichenwechsel von – zu +: lokales Minimum

$f(3) = 27 – 54 + 27 = 0$

Lokales Minimum: $P_2(3 \mid 0)$

Alternativ mit f''(x):

$f''(1) = 6(1) – 12 = –6 < 0 \rightarrow$ Maximum ✓

$f''(3) = 6(3) – 12 = 6 > 0 \rightarrow$ Minimum ✓

Aufgabe 3: Notwendige Bedingung: f''(x) = 0
6(x – 2) = 0
x = 2

Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechsel von f''):
- f''(1) = 6(1 – 2) = –6 < 0 (rechtsgekrümmt)
- f''(3) = 6(3 – 2) = 6 > 0 (linksgekrümmt)
Vorzeichenwechsel von – zu +: Wendestelle liegt vor.

Wendepunkt: f(2) = 8 – 24 + 18 = 2
W(2 | 2)

Krümmungsverhalten:
- Für x < 2: f''(x) < 0 → f ist rechtsgekrümmt (konkav)
- Für x > 2: f''(x) > 0 → f ist linksgekrümmt (konvex)

Die Wendestelle x = 2 liegt zwischen dem lokalen Maximum (x = 1) und dem lokalen Minimum (x = 3).

Aufgabe 4: Extremstellen: $x_1 = 1$ (lokales Maximum), $x_2 = 3$ (lokales Minimum)

Monotonieverhalten:
- Für x < 1: f'(x) > 0 → f ist streng monoton wachsend auf (–∞; 1)
- Für 1 < x < 3: f'(x) < 0 → f ist streng monoton fallend auf (1; 3)
- Für x > 3: f'(x) > 0 → f ist streng monoton wachsend auf (3; +∞)

Zusammenfassung:
- Monoton wachsend: (–∞; 1] ∪ [3; +∞)
- Monoton fallend: [1; 3]

Aufgabe 5: Der Graph wird wie folgt skizziert:

1. Nullstellen eintragen:
   - $N_1(0 \mid 0)$: einfache Nullstelle, Graph kreuzt x-Achse
   - $N_2(3 \mid 0)$: doppelte Nullstelle, Graph berührt x-Achse

2. Extrempunkte eintragen:
   - Maximum: $H(1 \mid 4)$
   - Minimum: $T(3 \mid 0)$

3. Wendepunkt eintragen:
   - $W(2 \mid 2)$

4. Kurvenverlauf zeichnen:
   - Von links ($-\infty$) steigt die Kurve (monoton wachsend) bis zum Maximum $H(1 \mid 4)$
   - Von H fällt die Kurve (monoton fallend) bis zum Minimum $T(3 \mid 0)$
   - Von T steigt die Kurve wieder (monoton wachsend) nach rechts ($+\infty$)
   - Bis $x = 2$ ist die Kurve rechtsgekrümmt (konkav)
   - Ab $x = 2$ ist die Kurve linksgekrümmt (konvex)
   - Der Wendepunkt $W(2 \mid 2)$ liegt auf der fallenden Strecke zwischen H und T

5. Verhalten im Unendlichen:
   - Für $x \to -\infty$: $f(x) \to -\infty$
   - Für $x \to +\infty$: $f(x) \to +\infty$

   (Leitkoeffizient $1 > 0$, Grad 3 ungerade)

Aufgabe 6: Kurvendiskussion von $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$:

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Symmetrie:
   $g(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + 2(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = g(x)$
   → Achsensymmetrie zur y-Achse (gerade Funktion)

3. Nullstellen:
   $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = x^2(-\frac{1}{4}x^2 + 2) = 0$
   $x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle)
   $-\frac{1}{4}x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x_2 = 2\sqrt{2}$, $x_3 = -2\sqrt{2}$ (einfache Nullstellen)

4. Ableitungen:
   $g'(x) = -x^3 + 4x = x(-x^2 + 4) = -x(x^2 - 4) = -x(x - 2)(x + 2)$
   $g''(x) = -3x^2 + 4$

5. Extremstellen ($g'(x) = 0$):
   $x = 0, x = 2, x = -2$

   $g''(0) = 4 > 0 \rightarrow$ lokales Minimum: $g(0) = 0$, $P_1(0 \mid 0)$
   $g''(2) = -3(4) + 4 = -8 < 0 \rightarrow$ lokales Maximum: $g(2) = -\frac{1}{4}(16) + 2(4) = -4 + 8 = 4$, $P_2(2 \mid 4)$
   $g''(-2) = -3(4) + 4 = -8 < 0 \rightarrow$ lokales Maximum: $g(-2) = 4$, $P_3(-2 \mid 4)$

6. Wendestellen ($g''(x) = 0$):
   $-3x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4/3 \rightarrow x = \pm 2/\sqrt{3} = \pm 2\sqrt{3}/3$

   $g(2\sqrt{3}/3) = -\frac{1}{4} \cdot (4/3)^2 + 2 \cdot 4/3 = -\frac{1}{4} \cdot 16/9 + 8/3$
   $= -4/9 + 24/9 = 20/9$

   Wendepunkte: $W_1(-2\sqrt{3}/3 \mid 20/9)$, $W_2(2\sqrt{3}/3 \mid 20/9)$

7. Krümmungsverhalten:
   - Für $|x| < 2\sqrt{3}/3$: $g''(x) > 0 \rightarrow$ linksgekrümmt
   - Für $|x| > 2\sqrt{3}/3$: $g''(x) < 0 \rightarrow$ rechtsgekrümmt

Aufgabe 7: 1. Extremstellen (h'(x) = 0):

$3(x - 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = 1$ oder $x_2 = 3$

2. Klassifikation mit Vorzeichenwechselkriterium:

Für $x_1 = 1$:

- $h'(0) = 3(0 - 1)(0 - 3) = 3 \cdot (-1) \cdot (-3) = 9 > 0$
- $h'(2) = 3(2 - 1)(2 - 3) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -3 < 0$

Vorzeichenwechsel von + zu –: lokales Maximum bei $x = 1$

Für $x_2 = 3$:

- $h'(2) = -3 < 0$
- $h'(4) = 3(4 - 1)(4 - 3) = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 > 0$

Vorzeichenwechsel von – zu +: lokales Minimum bei $x = 3$

3. Wendestelle (h''(x) = 0):

$6(x - 2) = 0$

$x = 2$

Vorzeichenwechsel von h'':

- $h''(1) = 6(1 - 2) = -6 < 0$
- $h''(3) = 6(3 - 2) = 6 > 0$

Wendestelle liegt bei $x = 2$

4. Erklärung des Vorzeichenwechselkriteriums:

Das Vorzeichen von h' beschreibt die Steigung von h:

- $h'(x) > 0$: h steigt (Graph geht nach oben)
- $h'(x) < 0$: h fällt (Graph geht nach unten)

An einer Extremstelle wechselt h' das Vorzeichen:

- Von + zu –: h steigt, dann fällt → Gipfel → lokales Maximum
- Von – zu +: h fällt, dann steigt → Tal → lokales Minimum

Dies ist eine hinreichende Bedingung für Extrema und unterscheidet sie von Sattelpunkten (kein Vorzeichenwechsel von h').

Aufgabe 8: Gegeben:
- Wendepunkt bei x = 1
- Graph verläuft durch P(2 | 0)

Ableitungen:
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6x + 2b$

1. Bedingung aus Wendepunkt (x = 1):

$f''(1) = 0$
$6(1) + 2b = 0$
$6 + 2b = 0$
$b = -3$

2. Bedingung aus Punkt P(2 | 0):

$f(2) = 0$
$2^3 + b(2^2) + c(2) = 0$
$8 + 4b + 2c = 0$

Mit $b = -3$:
$8 + 4(-3) + 2c = 0$
$8 - 12 + 2c = 0$
$-4 + 2c = 0$
$c = 2$

3. Verifikation:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
$f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$ ✓
$f''(x) = 6x - 6$
$f''(1) = 6 - 6 = 0$ ✓

Vorzeichenwechsel von f'':
$f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0 \rightarrow$ Wendestelle bei $x = 1$ ✓

Ergebnis: b = –3, c = 2

Aufgabe 9: Unterschied zwischen einfacher und doppelter Nullstelle:

1. Geometrische Bedeutung:

Einfache Nullstelle:
- Der Graph kreuzt die x-Achse
- Die Funktion wechselt das Vorzeichen (von + zu – oder von – zu +)
- Beispiel: $f(x) = x(x - 3)$ hat einfache Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 3$

Doppelte Nullstelle:
- Der Graph berührt die x-Achse, kreuzt sie aber nicht
- Die Funktion behält das Vorzeichen bei (bleibt auf einer Seite der x-Achse)
- An der doppelten Nullstelle liegt ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum)
- Beispiel: $f(x) = (x - 3)^2$ hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 3$

2. Erkennung mithilfe der Ableitungen:

Bei einer einfachen Nullstelle x_0:
- $f(x_0) = 0$
- $f'(x_0) \neq 0$ (die Ableitung ist nicht null)
- Der Graph schneidet die x-Achse mit einer Steigung ungleich null

Bei einer doppelten Nullstelle x_0:
- $f(x_0) = 0$
- $f'(x_0) = 0$ (die Ableitung ist null)
- $f''(x_0) \neq 0$ (die zweite Ableitung ist nicht null)
- Der Graph berührt die x-Achse mit horizontaler Tangente (Steigung = 0)
- Es liegt ein lokales Extremum vor

Beispiel: $f(x) = x(x - 3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$
$f''(x) = 6x - 12$

Bei $x = 0$ (einfache Nullstelle): $f'(0) = 9 \neq 0$ ✓
Bei $x = 3$ (doppelte Nullstelle): $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 6 \neq 0$ ✓

Dieses Blatt für deine Klasse anpassen

Leichtere Fassung mit Hilfen, Zusatzaufgaben für Schnelle, als Word-Datei oder per QR-Code an die Klasse — kostenlos in Lehreule.

lehreule.de/arbeitsblatt/kurvendiskussion-klasse-12