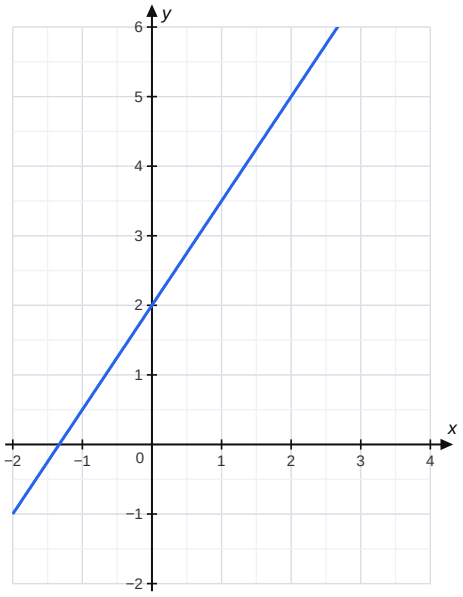
Lineare Funktionen – Zusatz- und Expertenaufgaben

Mathematik, Klasse 8 (Gymnasium) – Knobeln, Begründen und Transfer zu y = m·x + b

Diese Zusatzaufgaben sind für alle, die mit dem Arbeitsblatt schon fertig sind. Sie sind schwieriger als die Grundaufgaben und verlangen Transfer, Begründen und eigenes Nachdenken. Du darfst dir Zeit lassen und mehrere Lösungswege ausprobieren. Notiere immer, wie du auf dein Ergebnis gekommen bist.



Graph der Funktion g (wie auf dem Arbeitsblatt)

1 Die Funktion g mit g(x) = 1,5x + 2 ist oben dargestellt.
a) Berechne die Nullstelle von g.
b) Bestimme die Gleichung der Geraden h, die parallel zu g verläuft und durch den Punkt P(4; −1) geht.
c) Begründe, dass der senkrechte Abstand der beiden Geraden g und h an jeder Stelle x gleich groß ist, und gib ihn an.

2 Die Punkte A(−2; −1), B(1; 5) und C(4; t) sollen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Bestimme t und die Gleichung dieser Geraden. Erkläre außerdem, wie du mit Steigungen prüfen könntest, ob drei beliebige Punkte auf einer Geraden liegen.

3 Entscheide, ob die Aussagen richtig oder falsch sind. Überlege dir jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel.

	richtig	falsch
Jede Gerade im Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion $y = mx + b$.	☐	☐
Eine Gerade mit der Steigung $m = 0$ ist der Graph einer linearen Funktion.	☐	☐
Zwei Geraden mit unterschiedlicher Steigung schneiden sich in genau einem Punkt.	☐	☐
Bei einer linearen Funktion verdoppelt sich Δy, wenn man Δx verdoppelt.	☐	☐
Die Gerade $y = -0{,}5x + b$ mit $b > 0$ schneidet die x-Achse bei einem negativen x-Wert.	☐	☐

4 Ordne jeder Bedingung die passende Funktionsgleichung zu.

1. Parallel zu $y = 2x + 1$ und durch den Punkt (0; −3)	____	A) $y = 7$
2. Steigung −1 und durch den Punkt (2; 0)	____	B) $y = -x + 4$
3. Durch die Punkte (0; 4) und (4; 0)	____	C) $y = -x + 2$
4. Waagerecht und durch den Punkt (5; 7)	____	D) $y = 2x - 3$

5 Zwei Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Kerze A ist anfangs 20 cm hoch und brennt pro Stunde 2 cm ab. Kerze B ist anfangs 15 cm hoch und brennt pro Stunde 1 cm ab.
a) Stelle für beide Kerzen eine Funktionsgleichung der Höhe in Abhängigkeit von der Brenndauer t (in Stunden) auf.
b) Wann sind beide Kerzen gleich hoch, und wie hoch sind sie dann?
c) Nach welcher Zeit ist jede Kerze abgebrannt? Gib die sinnvollen Definitionsbereiche an und erkläre, warum die Geraden für $t > 10$ nur noch eingeschränkt sinnvoll sind.

6 Die Gerade $y = -2x + 6$ schließt zusammen mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
a) Bestimme die Eckpunkte und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
b) Eine Gerade $y = m \cdot x + 4$ mit $m < 0$ soll mit den Koordinatenachsen ein Dreieck vom Flächeninhalt 16 FE einschließen. Bestimme m.

7 Forscheraufgabe: Für jede reelle Zahl a ist die Funktion f_a(x) = a·x + 3 − 2a gegeben. Das ergibt unendlich viele Geraden (eine „Geradenschar“).

a) Zeichne oder berechne f_a für a = 0, a = 1 und a = 2. Was fällt dir auf?

b) Bestimme den Punkt, durch den alle Geraden der Schar gehen, und begründe rechnerisch, warum das so ist.

c) Für welchen Wert von a geht die Gerade durch den Ursprung?

Lösungen

Lineare Funktionen – Zusatz- und Expertenaufgaben · Mathematik · Klasse 8

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/lineare-funktionen-klasse-8 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: a) Nullstelle: $1{,}5x + 2 = 0 \rightarrow x = -2/1{,}5 = -4/3 \approx -1{,}33$. Die Gerade schneidet die x-Achse bei $(-4/3; 0)$.
b) Parallele Geraden haben dieselbe Steigung, also $h(x) = 1{,}5x + b$. Einsetzen von P: $-1 = 1{,}5 \cdot 4 + b = 6 + b \rightarrow b = -7$. Also $h(x) = 1{,}5x - 7$.
c) Für jedes x gilt $g(x) - h(x) = (1{,}5x + 2) - (1{,}5x - 7) = 9$. Der Term mit x fällt weg, deshalb ist der Unterschied der Funktionswerte (also der Abstand in y-Richtung) überall 9. Das liegt daran, dass beide Geraden dieselbe Steigung haben und sich nur im y-Achsenabschnitt unterscheiden. (Der kürzeste, senkrecht gemessene Abstand ist kleiner, nämlich $9/\sqrt{(1+1{,}5^2)} \approx 4{,}99$; gefragt ist hier der Abstand in y-Richtung.)

Aufgabe 2: Steigung durch A und B: $m = (5 - (-1))/(1 - (-2)) = 6/3 = 2$. Einsetzen von B: $5 = 2 \cdot 1 + b \rightarrow b = 3$. Gleichung: $y = 2x + 3$ (Kontrolle mit A: $2 \cdot (-2) + 3 = -1$ ✓). Für C gilt $t = 2 \cdot 4 + 3 = 11$, also C(4; 11).
Allgemeine Prüfung: Drei Punkte liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die Steigung zwischen dem ersten und zweiten Punkt gleich der Steigung zwischen dem zweiten und dritten Punkt ist. Hier: Steigung $B \rightarrow C = (11 - 5)/(4 - 1) = 6/3 = 2$ ✓.

Aufgabe 3: Jede Gerade im Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion $y = mx + b$. → **falsch**
Eine Gerade mit der Steigung $m = 0$ ist der Graph einer linearen Funktion. → **richtig**
Zwei Geraden mit unterschiedlicher Steigung schneiden sich in genau einem Punkt. → **richtig**
Bei einer linearen Funktion verdoppelt sich Δy, wenn man Δx verdoppelt. → **richtig**
Die Gerade $y = -0{,}5x + b$ mit $b > 0$ schneidet die x-Achse bei einem negativen x-Wert. → **falsch**

Aufgabe 4: 1 → D, 2 → C, 3 → B, 4 → A

Aufgabe 5: a) $h_A(t) = -2t + 20$ und $h_B(t) = -t + 15$.
b) Gleichsetzen: $-2t + 20 = -t + 15 \rightarrow t = 5$. Dann ist $h = -2 \cdot 5 + 20 = 10$ cm. Nach 5 Stunden sind beide Kerzen 10 cm hoch.
c) Kerze A: $-2t + 20 = 0 \rightarrow t = 10$ h. Kerze B: $-t + 15 = 0 \rightarrow t = 15$ h. Definitionsbereiche: für A $0 \le t \le 10$, für B $0 \le t \le 15$. Für $t > 10$ würde h_A negative Werte annehmen, was eine negative Kerzenhöhe bedeuten würde. Das ist im Sachzusammenhang nicht möglich, die Kerze ist dann einfach abgebrannt (Höhe 0).

Aufgabe 6: a) Schnittpunkt mit der y-Achse: (0; 6). Nullstelle: $-2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3$, also (3; 0). Dritte Ecke: Ursprung (0; 0). Das Dreieck ist rechtwinklig mit den Katheten 3 und 6: $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$ FE.
b) Eckpunkte: (0; 0), (0; 4) und die Nullstelle $x_0 = -4/m = 4/|m|$. Fläche: $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4/|m|) = 8/|m|$. Aus $8/|m| = 16$ folgt $|m| = 0{,}5$, also $m = -0{,}5$. Kontrolle: Nullstelle bei $x = 8$, $A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ ✓.

Aufgabe 7: a) $f_0(x) = 3$, $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = 2x - 1$. Alle drei Geraden scheinen sich im Punkt (2; 3) zu treffen: $f_0(2) = 3$, $f_1(2) = 3$, $f_2(2) = 3$.
b) Einsetzen von $x = 2$: $f_a(2) = a \cdot 2 + 3 - 2a = 3$, und zwar unabhängig von a. Also gehen alle Geraden durch den Punkt (2; 3).
c) Durch den Ursprung bedeutet $f_a(0) = 0$, also $3 - 2a = 0 \rightarrow a = 1{,}5$. Die Gerade lautet $f_{1{,}5}(x) = 1{,}5x$.