Potenzen und Wurzeln – Zusatzaufgaben für Schnelle

Expertenaufgaben: Knobeln, Begründen und Forschen

Das sind Zusatzaufgaben für Schnelle: Du hast die Aufgaben des Arbeitsblattes fertig und möchtest mehr Herausforderung? Dann bist du hier richtig. Die Aufgaben sind anspruchsvoller. Du musst begründen, bewerten und Neues entdecken. Du darfst dir Zeit nehmen, probieren und Skizzen anfertigen. Schreibe deine Gedanken und Rechenwege immer mit auf. Einen Taschenrechner brauchst du nicht.

1 Knobelrechnen: Berechne möglichst geschickt im Kopf.

a) $\sqrt{(5^2 + 12^2)}$ = _____

b) $(\sqrt{49})^3$ = _____

c) $2^3 \cdot 5^3$ = _____

d) $\sqrt{(2^8)}$ = _____

e) $10^6 : 10^4$ = _____

f) $\sqrt{0{,}49}$ = _____

2 Wahr oder falsch? Überlege dir für jede Aussage eine Begründung oder ein Gegenbeispiel.

	richtig	falsch
Für alle positiven Zahlen a und b gilt $\sqrt{(a^2 + b^2)} = a + b$.	☐	☐
Es gilt $2^6 = 4^3$.	☐	☐
Es gibt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist.	☐	☐
Der Wert $\sqrt{50}$ liegt zwischen 7 und 8.	☐	☐
Es gilt $(-4)^2 = 16$ und $-4^2 = -16$.	☐	☐

3 Die Oberfläche eines Würfels beträgt 150 cm². Wie lang ist seine Kantenlänge?

- ☐ 5 cm
- ☐ 25 cm
- ☐ 15 cm
- ☐ 6 cm

4 Welche der Zahlen sind sowohl eine Quadratzahl als auch eine Kubikzahl (dritte Potenz einer natürlichen Zahl)? Es können mehrere Antworten richtig sein.

- ☐ 1
- ☐ 64
- ☐ 125
- ☐ 729

5 Wurzeln ohne Taschenrechner: Zwischen welchen beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen liegt $\sqrt{300}$? Ist $\sqrt{300}$ näher an der kleineren oder an der größeren Zahl? Bestimme $\sqrt{300}$ anschließend auf eine Nachkommastelle genau, indem du Dezimalzahlen quadrierst.

6 Eine Schmiede schmilzt zwei Metallwürfel mit den Kantenlängen 3 cm und 4 cm ein und gießt daraus einen neuen, größeren Würfel. a) Berechne das Volumen des neuen Würfels. b) Zwischen welchen beiden Zahlen mit einer Nachkommastelle liegt seine Kantenlänge? (Tipp: $4{,}5^3 = 91{,}125$.) c) Forscheraufgabe: Zeige, dass $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ gilt. Was bedeutet das für Würfel?

7 Fehleranalyse: Tim rechnet $\sqrt{(36 + 64)} = \sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$. Finde den Fehler und gib das richtige Ergebnis an. Zeige dann mit einem eigenen Zahlenbeispiel, dass auch $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ im Allgemeinen nicht gilt. Wann würde die Gleichung $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ausnahmsweise stimmen? Nenne ein Beispiel.

8 Ein großer Würfel mit der Kantenlänge 4 cm besteht aus 64 kleinen Würfeln mit der Kantenlänge 1 cm. Er wird von außen komplett rot angemalt (auch unten) und danach wieder in die 64 kleinen Würfel zerlegt. a) Wie viele kleine Würfel haben 3, 2, 1 bzw. 0 rote Flächen? b) Kontrolliere, dass du alle 64 Würfel erfasst hast. c) Wie viele kleine Würfel haben keine rote Fläche, wenn der große Würfel die Kantenlänge 10 cm hat? Begründe.

9 Ein Würfel wird so vergrößert, dass seine Oberfläche 25-mal so groß wird wie vorher. a) Um welchen Faktor wächst die Kantenlänge? b) Um welchen Faktor wächst das Volumen? c) Ein anderer Würfel soll ein 27-mal so großes Volumen haben. Um welchen Faktor wächst seine Oberfläche? Begründe jeweils mit Potenzen oder Wurzeln.



Quadratzahlen als Punktmuster: Jede neue Schicht (orange) legt sich winkelförmig um das bisherige Quadrat.

10 Forscheraufgabe zur Abbildung: a) Berechne 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. b) Welche Regel erkennst du? Wie groß ist die Summe der ersten 20 ungeraden Zahlen? c) Erkläre mit Hilfe der Abbildung, warum die Regel immer gilt. Wie viele Punkte legt man an ein Quadrat mit 5 × 5 Punkten an, um ein Quadrat mit 6 × 6 Punkten zu erhalten?

Lösungen

Potenzen und Wurzeln – Zusatzaufgaben für Schnelle · Mathematik · Klasse 8

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/potenzen-und-wurzeln-klasse-8 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: a) 13, b) 343, c) 1000, d) 16, e) 100, f) 0,7

Aufgabe 2: Für alle positiven Zahlen a und b gilt $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. → **falsch**
Es gilt $2^6 = 4^3$. → **richtig**
Es gibt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist. → **richtig**
Der Wert $\sqrt{50}$ liegt zwischen 7 und 8. → **richtig**
Es gilt $(-4)^2 = 16$ und $-4^2 = -16$. → **richtig**

Aufgabe 3: 5 cm

Aufgabe 4: 1, 64, 729

Aufgabe 5: Es gilt $17^2 = 289$ und $18^2 = 324$. Wegen $289 < 300 < 324$ liegt $\sqrt{300}$ zwischen 17 und 18. Der Abstand zu 289 ist 11, der Abstand zu 324 ist 24. Also liegt $\sqrt{300}$ näher an 17. Probieren: $17{,}3^2 = 299{,}29$ (zu klein) und $17{,}4^2 = 302{,}76$ (zu groß). Also liegt $\sqrt{300}$ zwischen 17,3 und 17,4. Weil 300 näher an 299,29 liegt, gilt $\sqrt{300} \approx 17{,}3$. Antwort: $\sqrt{300}$ liegt zwischen 17 und 18, näher an 17, und beträgt etwa 17,3.

Aufgabe 6: a) $V = 3^3\ \text{cm}^3 + 4^3\ \text{cm}^3 = 27\ \text{cm}^3 + 64\ \text{cm}^3 = 91\ \text{cm}^3$. b) Gesucht ist a mit $a^3 = 91$. Wegen $4^3 = 64 < 91 < 125 = 5^3$ ist $4 < a < 5$. Weil $4{,}5^3 = 91{,}125$ größer als 91 ist, gilt $a < 4{,}5$. Mit $4{,}4^3 = 85{,}184 < 91$ folgt: a liegt zwischen 4,4 cm und 4,5 cm. c) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216$ und $6^3 = 216$. Also stimmt die Gleichung. Bedeutung: Schmilzt man drei Würfel mit den Kantenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm ein, erhält man genau einen Würfel mit der Kantenlänge 6 cm. Antwort: Der neue Würfel hat 91 cm^3 Volumen und eine Kantenlänge zwischen 4,4 cm und 4,5 cm.

Aufgabe 7: Fehler: Man darf die Wurzel nicht „auf die Summe verteilen“. Zuerst muss man die Summe unter der Wurzel berechnen: $\sqrt{(36 + 64)} = \sqrt{100} = 10$. Tims Ergebnis 14 ist falsch. Gegenbeispiel für die zweite Regel: a = 3, b = 4. Dann ist $(3 + 4)^2 = 7^2 = 49$, aber $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Die Werte sind verschieden. Ausnahme: Die Gleichung gilt, wenn a = 0 oder b = 0 ist, zum Beispiel a = 0 und b = 5: $(0 + 5)^2 = 25$ und $0^2 + 5^2 = 25$.

Aufgabe 8: a) 3 rote Flächen: Das sind die 8 Eckwürfel. 2 rote Flächen: Der Würfel hat 12 Kanten, auf jeder Kante liegen $4 - 2 = 2$ Würfel ohne Ecken, also $12 \cdot 2 = 24$ Würfel. 1 rote Fläche: Jede der 6 Seitenflächen hat in der Mitte $2 \cdot 2 = 4$ solche Würfel, also $6 \cdot 4 = 24$ Würfel. 0 rote Flächen: Das sind die Würfel im Inneren, ein Würfel der Kantenlänge 2, also $2^3 = 8$ Würfel. b) $8 + 24 + 24 + 8 = 64$. Das passt zu $4^3 = 64$. c) Bei Kantenlänge 10 liegen innen alle Würfel, die nicht in der äußeren Schicht liegen. Das ist ein Würfel mit der Kantenlänge $10 - 2 = 8$, also $8^3 = 512$ Würfel ohne rote Fläche.

Aufgabe 9: a) Die Oberfläche wächst mit dem Quadrat der Kantenlänge ($O = 6 \cdot a^2$). Wird die Kante k-mal so lang, wird O k^2-mal so groß. Aus $k^2 = 25$ folgt $k = \sqrt{25} = 5$. Die Kantenlänge wird 5-mal so groß. b) Das Volumen wächst mit der dritten Potenz: $k^3 = 5^3 = 125$. Das Volumen wird 125-mal so groß. c) Aus $k^3 = 27$ folgt $k = 3$, weil $3^3 = 27$. Die Oberfläche wird dann $k^2 = 3^2 = 9$-mal so groß. Antwort: a) Faktor 5, b) Faktor 125, c) Faktor 9.

Aufgabe 10: a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. b) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2. Hier: 6 Zahlen und $6^2 = 36$. Für 20 Zahlen gilt $20^2 = 400$. c) In der Abbildung wird an ein Quadrat mit $n \times n$ Punkten eine winkelförmige Schicht aus Punkten angelegt: eine Spalte mit n Punkten, eine Zeile mit n Punkten und ein Eckpunkt, also $n + n + 1 = 2n + 1$ Punkte. Das ist genau die nächste ungerade Zahl. So entsteht aus n^2 das nächste Quadrat $(n + 1)^2$. Beim Übergang von 5×5 zu 6×6 braucht man $2 \cdot 5 + 1 = 11$ Punkte. Kontrolle: $36 - 25 = 11$. Damit gilt die Regel für jede Zahl n.