

Quadratische Funktionen — Scheitelpunkt und Nullstellen

Normalform, Scheitelpunktform, graphische und rechnerische Verfahren

Bearbeite die folgenden Aufgaben zu quadratischen Funktionen. Du wirst Scheitelpunkte bestimmen, Nullstellen berechnen und Graphen analysieren. Nutze bei Bedarf die quadratische Ergänzung oder die pq-Formel. Zeichne Graphen sorgfältig in Koordinatensysteme.

1 Bestimme, welche der folgenden Funktionen den Scheitelpunkt $S(2|-3)$ hat.

☐ $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

☐ $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

☐ $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

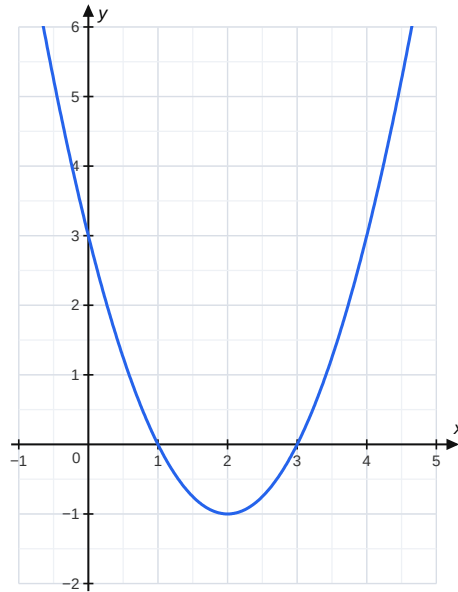
☐ $f(x) = -(x - 3)^2 - 2$

2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Bestimme den Scheitelpunkt durch quadratische Ergänzung.

b) Gib die Scheitelpunktform an.

c) Berechne die Nullstellen.



Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3

Berechne die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen mithilfe der pq-Formel oder durch Faktorisierung.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

4

Die Funktion $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$ beschreibt die Flugbahn eines Balls (x in Metern, $f(x)$ in Metern).

a) Bestimme die maximale Höhe des Balls (Scheitelpunkt).

b) Berechne, in welcher Entfernung der Ball auf dem Boden aufkommt (Nullstellen).

c) Interpretiere die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe.

5

Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine _____. Wenn $a > 0$, öffnet sich die Parabel nach _____. Der Punkt mit dem kleinsten oder größten Funktionswert heißt _____. Die Punkte, in denen der Graph die x -Achse schneidet, sind die _____. Die Gerade $x = -b/(2a)$ ist die _____ der Parabel.

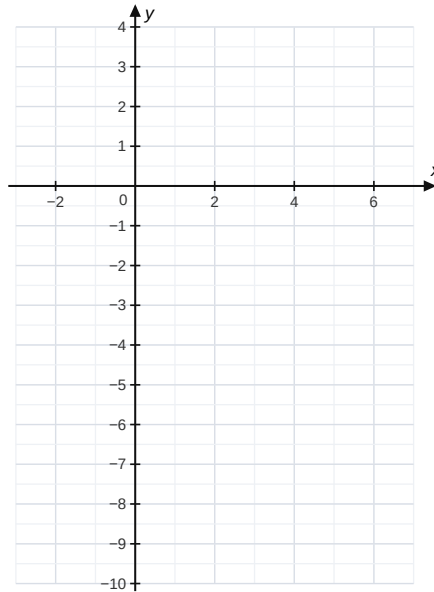
6

Gegeben sind zwei Nullstellen einer quadratischen Funktion: $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$. Der Streckfaktor a ist 1.

a) Gib die faktorisierte Form der Funktion an.

b) Berechne den Scheitelpunkt mithilfe der Symmetrie.

c) Wandle die faktorisierte Form in die Normalform um.



Koordinatensystem zum Zeichnen einer Parabel

7 Entscheide, ob die folgenden Aussagen zu quadratischen Funktionen wahr oder falsch sind.

	richtig	falsch
Nicht jede quadratische Funktion hat genau zwei Nullstellen.	☐	☐
Der Scheitelpunkt einer Parabel liegt immer auf der Symmetrieachse.	☐	☐
Die Scheitelpunktform $f(x) = a(x - d)^2 + e$ zeigt den Scheitelpunkt direkt als $S(d e)$.	☐	☐
Wenn a negativ ist, hat die Parabel ein Minimum.	☐	☐
Die Nullstellen einer Funktion sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse.	☐	☐

★ ★ Bonus für Schnelle

8

★ Bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

a) Erkläre, wie sich der Streckfaktor $a = 2$ im Vergleich zur Normalparabel auf die Form des Graphen auswirkt.

b) Gib an, für welche x -Werte die Funktion negativ ist.

9

★ Eine Brücke hat die Form einer Parabel. Sie wird durch die Funktion $h(x) = -0,01x^2 + 0,4x$ beschrieben (x und $h(x)$ in Metern). Die Brücke beginnt bei $x = 0$ und endet bei $x = 40$.

a) Berechne die maximale Höhe der Brücke.

b) Bestimme die Spannweite der Brücke (Abstand zwischen den Nullstellen).

c) In welcher Entfernung vom Anfang ($x = 0$) befindet sich der höchste Punkt der Brücke?

Lösungen

Quadratische Funktionen — Scheitelpunkt und Nullstellen · Mathematik · Klasse 9

Aufgabe 1: $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

Aufgabe 2: a) Quadratische Ergänzung:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1$$

Der Scheitelpunkt ist $S(2|-1)$.

b) Die Scheitelpunktform ist $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.

c) Nullstellen durch Gleichsetzen mit 0:

$$(x - 2)^2 - 1 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = \pm 1$$

$$x_1 = 3, x_2 = 1$$

Die Nullstellen sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

Aufgabe 3: a) $x_1 = 2, x_2 = 3$

b) $x_1 = 2, x_2 = -4$

c) $x_1 = 3, x_2 = -3$

Aufgabe 4: a) Scheitelpunkt durch Umformung in Scheitelpunktform:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 6$$

$$f(x) = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 6$$

$$f(x) = -2((x - 2)^2 - 4) - 6$$

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + 8 - 6$$

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + 2$$

Der Scheitelpunkt ist $S(2|2)$. Die maximale Höhe ist 2 Meter.

b) Nullstellen:

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

Der Ball kommt bei $x = 1$ m auf (Start) und bei $x = 3$ m auf dem Boden auf (Landung).

c) Der Ball wird bei $x = 1$ m abgeworfen, erreicht seine maximale Höhe von 2 m bei $x = 2$ m (horizontal) und landet bei $x = 3$ m wieder auf dem Boden. Die Flugweite beträgt 2 Meter.

Aufgabe 5: Parabel, oben, Scheitelpunkt, Nullstellen, Symmetrieachse

Aufgabe 6: a) Faktorisierte Form mit $a = 1$:

$$f(x) = 1 \cdot (x - (-1))(x - 5)$$

$$f(x) = (x + 1)(x - 5)$$

b) Der Scheitelpunkt liegt auf der Symmetrieachse, die in der Mitte der beiden Nullstellen verläuft:

$$x_S = (-1 + 5)/2 = 4/2 = 2$$

Funktionswert im Scheitelpunkt:

$$f(2) = (2 + 1)(2 - 5) = 3 \cdot (-3) = -9$$

Der Scheitelpunkt ist $S(2|-9)$.

c) Normalform durch Ausmultiplizieren:

$$f(x) = (x + 1)(x - 5)$$

$$f(x) = x^2 - 5x + x - 5$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

Aufgabe 7: Nicht jede quadratische Funktion hat genau zwei Nullstellen. → **richtig**

Der Scheitelpunkt einer Parabel liegt immer auf der Symmetrieachse. → **richtig**

Die Scheitelpunktform $f(x) = a(x - d)^2 + e$ zeigt den Scheitelpunkt direkt als $S(d|e)$. → **richtig**

Wenn a negativ ist, hat die Parabel ein Minimum. → **falsch**

Die Nullstellen einer Funktion sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x -Achse. → **richtig**

Aufgabe 8: Scheitelpunktform durch Ausklammern und quadratische Ergänzung:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$f(x) = 2(x^2 - 4x) + 6$$

$$f(x) = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 6$$

$$f(x) = 2((x - 2)^2 - 4) + 6$$

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 8 + 6$$

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 2$$

Scheitelpunkt: $S(2|-2)$

Nullstellen:

$$2(x - 2)^2 - 2 = 0$$

$$2(x - 2)^2 = 2$$

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = \pm 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

a) Der Streckfaktor $a = 2$ bedeutet, dass die Parabel gegenüber der Normalparabel $f(x) = x^2$ um den Faktor 2 in y -Richtung gestreckt ist. Sie ist also schmaler und steiler.

b) Die Funktion ist negativ zwischen den Nullstellen, also für $1 < x < 3$.

Aufgabe 9: a) Maximale Höhe durch Scheitelpunktform:

$$h(x) = -0,01x^2 + 0,4x$$

$$h(x) = -0,01(x^2 - 40x)$$

$$h(x) = -0,01(x^2 - 40x + 400 - 400)$$

$$h(x) = -0,01((x - 20)^2 - 400)$$

$$h(x) = -0,01(x - 20)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt ist $S(20|4)$. Die maximale Höhe beträgt 4 Meter.

b) Spannweite durch Nullstellen:

$$-0,01x^2 + 0,4x = 0$$

$$x(-0,01x + 0,4) = 0$$

$$x = 0 \text{ oder } x = 40$$

Die Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 40$. Die Spannweite beträgt 40 Meter.

c) Der höchste Punkt befindet sich bei $x = 20$ Metern vom Anfang entfernt (in der Mitte der Brücke).



Dieses Blatt für deine Klasse anpassen

Leichter, schwerer, andere Aufgaben oder passend zum Lehrplan deines Bundeslands —
kostenlos in Lehreule.

lehreule.de/arbeitsblatt/quadratische-funktionen-klasse-9