Satz des Pythagoras – Zusatz- und Expertenaufgaben

Mathematik, Klasse 9 – Vertiefung, Transfer und Knobelaufgaben für Schnelle

Diese Zusatzaufgaben sind für alle gedacht, die mit dem Arbeitsblatt bereits fertig sind und eine Herausforderung suchen. Es geht nicht mehr nur um das reine Einsetzen in $a^2 + b^2 = c^2$, sondern um Beweise, Transfer auf neue Situationen, kritisches Bewerten von Aussagen und knifflige Forscheraufgaben. Nimm dir Zeit zum Nachdenken – hier zählt nicht Schnelligkeit, sondern sauberes Argumentieren.

1 Zeige mithilfe des Satzes des Pythagoras, dass ein Dreieck mit den Seitenlängen 20, 21 und 29 rechtwinklig ist. Welche Seite ist dabei die Hypotenuse und warum?

2 Ein pythagoreisches Tripel besteht aus drei natürlichen Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$. Das bekannteste ist (3, 4, 5). Zeige rechnerisch, dass auch (6, 8, 10) und (9, 12, 15) pythagoreische Tripel sind, und erkläre allgemein, wie man aus einem bekannten Tripel beliebig viele weitere erzeugen kann.

3 Beweise den Satz des Pythagoras mithilfe eines geometrischen Zerlegungsbeweises: Betrachte ein großes Quadrat mit Seitenlänge (a+b), in das vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c so hineingelegt werden, dass in der Mitte ein kleineres Quadrat mit Seitenlänge c entsteht. Leite daraus $a^2 + b^2 = c^2$ her.

4 Knobelaufgaben: Finde jeweils die fehlende Größe. Hier sind teils zwei Schritte oder algebraisches Umstellen nötig.

a) Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Basis 12 cm und die Schenkel je 10 cm. Berechne die Höhe h auf die Basis (Tipp: Die Höhe halbiert die Basis und bildet mit dem Schenkel ein rechtwinkliges Dreieck). →

b) Ein Quadrat hat die Diagonale 14 cm. Berechne die Seitenlänge a des Quadrats (Tipp: Stelle $a^2 + a^2 = d^2$ nach a um). →

c) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist bekannt: Die Hypotenuse ist um 2 cm länger als die längere Kathete, die kürzere Kathete ist 6 cm lang. Bestimme alle drei Seitenlängen. →

5 Ein Flugzeug startet vom Flughafen A und fliegt zunächst 240 km genau nach Norden, dann 180 km genau nach Osten zu Flughafen B. Ein zweites Flugzeug könnte direkt von A nach B fliegen. Berechne die direkte Entfernung und bestimme, wie viele Kilometer das zweite Flugzeug im Vergleich zur Route des ersten Flugzeugs einspart.

6 Kreuze an, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Begründe bei mindestens zwei Aussagen stichpunktartig, warum sie richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Verdoppelt man beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so verdoppelt sich auch die Hypotenuse.	☐	☐
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse kürzer als die Summe der beiden Katheten.	☐	☐
Wenn man bei einem rechtwinkligen Dreieck beide Katheten um 1 cm verlängert, verlängert sich die Hypotenuse ebenfalls genau um 1 cm.	☐	☐
Die Raumdiagonale eines Würfels mit Kantenlänge a lässt sich mit $d = a \cdot \sqrt{3}$ berechnen.	☐	☐
Ein Dreieck mit den Seiten 5, 12 und 13 ist rechtwinklig.	☐	☐

7 Forscheraufgabe: Ein Kreis hat den Radius r = 10 cm. Eine Sehne hat die Länge 16 cm. Berechne den Abstand d des Mittelpunkts M des Kreises von dieser Sehne. Begründe dein Vorgehen mit einer Skizze in Worten (welches rechtwinklige Dreieck nutzt du?).

8 Bewerte folgende Schülerlösung kritisch und korrigiere den Fehler: 'Gegeben sind die Katheten a = 5 cm und b = 12 cm eines rechtwinkligen Dreiecks. Gesucht ist die Hypotenuse c. Rechnung: $c = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ cm.' Erkläre genau, was hier falsch gemacht wurde und wie die richtige Lösung lautet.

9 Transferaufgabe: In einem Fernseher-Prospekt steht '55-Zoll-Bildschirm' – gemeint ist die Länge der Bildschirmdiagonale in Zoll (1 Zoll ≈ 2,54 cm). Das Seitenverhältnis moderner Fernseher beträgt 16:9 (Breite : Höhe). Berechne Breite und Höhe des Bildschirms in Zentimetern. (Tipp: Setze die Breite als 16k und die Höhe als 9k an und nutze den Satz des Pythagoras, um k zu bestimmen.)

Lösungen

Satz des Pythagoras – Zusatz- und Expertenaufgaben · Mathematik · Klasse 9

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/satz-des-pythagoras-klasse-9 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: Die längste Seite muss die Hypotenuse sein, also c = 29. Prüfe: $a^2 + b^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$. $c^2 = 29^2 = 841$. Da $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, ist das Dreieck nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras rechtwinklig, und die Seite mit Länge 29 (gegenüber dem rechten Winkel) ist die Hypotenuse.

Aufgabe 2: (6,8,10): $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$. (9,12,15): $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$. Beide erfüllen die Gleichung. Allgemein gilt: Wenn (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel ist, dann ist für jede natürliche Zahl k auch (k·a, k·b, k·c) ein pythagoreisches Tripel, denn $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2+b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$. Man kann also aus einem Grundtripel wie (3,4,5) durch Multiplikation mit k = 2, 3, 4, ... unendlich viele weitere Tripel erzeugen.

Aufgabe 3: Die Fläche des großen Quadrats beträgt $(a+b)^2$. Sie setzt sich zusammen aus vier rechtwinkligen Dreiecken (je Flächeninhalt ½ab, zusammen 4 · ½ab = 2ab) und dem kleinen Quadrat in der Mitte mit Fläche c^2. Also gilt: $(a+b)^2 = 2ab + c^2$. Ausmultipliziert: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$. Subtrahiert man 2ab auf beiden Seiten, erhält man $a^2 + b^2 = c^2$. Damit ist der Satz des Pythagoras geometrisch bewiesen.

Aufgabe 4: a) $h = \sqrt{(10^2 - 6^2)} = \sqrt{(100-36)} = \sqrt{64} = 8$ cm, b) $2a^2 = 14^2 = 196 \rightarrow a^2 = 98 \rightarrow a = \sqrt{98} \approx 9{,}90$ cm, c) Mit b = längere Kathete, c = b+2, a = 6: $6^2 + b^2 = (b+2)^2 \rightarrow 36 + b^2 = b^2 + 4b + 4 \rightarrow 36 = 4b + 4 \rightarrow b = 8$ cm, c = 10 cm. Seiten: 6 cm, 8 cm, 10 cm

Aufgabe 5: Die direkte Strecke AB ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 240 km und 180 km: $AB = \sqrt{(240^2 + 180^2)} = \sqrt{(57600 + 32400)} = \sqrt{90000} = 300$ km. Das erste Flugzeug fliegt 240 + 180 = 420 km. Ersparnis: 420 km − 300 km = 120 km.

Aufgabe 6: Verdoppelt man beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, so verdoppelt sich auch die Hypotenuse. → **richtig**
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse kürzer als die Summe der beiden Katheten. → **richtig**
Wenn man bei einem rechtwinkligen Dreieck beide Katheten um 1 cm verlängert, verlängert sich die Hypotenuse ebenfalls genau um 1 cm. → **falsch**
Die Raumdiagonale eines Würfels mit Kantenlänge a lässt sich mit $d = a\cdot\sqrt{3}$ berechnen. → **richtig**
Ein Dreieck mit den Seiten 5, 12 und 13 ist rechtwinklig. → **richtig**

Aufgabe 7: Der Mittelpunkt M wird mit dem Lot auf die Sehne verbunden; dieses Lot halbiert die Sehne und trifft sie im rechten Winkel. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse r = 10 cm (Verbindung von M zu einem Sehnenendpunkt), einer Kathete = halbe Sehnenlänge = 8 cm und der gesuchten Kathete d (Abstand des Mittelpunkts von der Sehne). Es gilt: $d = \sqrt{(r^2 - 8^2)} = \sqrt{(100 - 64)} = \sqrt{36} = 6$ cm. Der Abstand des Mittelpunkts von der Sehne beträgt 6 cm.

Aufgabe 8: Der Fehler liegt darin, dass die Schülerin/der Schüler c mit c^2 verwechselt: Der Satz des Pythagoras liefert $c^2 = a^2 + b^2 = 169$, nicht c selbst. Außerdem wurde die Einheit falsch behandelt (cm statt cm^2) und am Ende vergessen, die Wurzel zu ziehen. Richtige Lösung: $c^2 = 25 + 144 = 169\ cm^2$, also $c = \sqrt{169}\ cm = 13\ cm$.

Aufgabe 9: Diagonale in cm: $55 \cdot 2{,}54 \approx 139{,}7$ cm. Mit Breite = 16k und Höhe = 9k gilt: $(16k)^2 + (9k)^2 = 139{,}7^2 \rightarrow 256k^2 + 81k^2 = 19516 \rightarrow 337k^2 = 19516 \rightarrow k^2 \approx 57{,}91 \rightarrow k \approx 7{,}61$. Breite $\approx 16 \cdot 7{,}61 \approx 121{,}8$ cm, Höhe $\approx 9 \cdot 7{,}61 \approx 68{,}5$ cm. Der Bildschirm ist also etwa 121,8 cm breit und 68,5 cm hoch.