Spezielle Relativitätstheorie – Expertenaufgaben

Zusatzaufgaben für Schnelle: Transfer, Vertiefung und Knobeln

Diese Aufgaben sind Zusatzaufgaben für alle, die mit dem Basis-Arbeitsblatt fertig sind. Sie sind deutlich anspruchsvoller: Du musst Gelerntes in neuen Situationen anwenden, begründen und bewerten. Verwende $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. Du darfst die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Notiere Ansätze und Rechenwege nachvollziehbar, auch wenn du nicht bis zum Ergebnis kommst.

1 Relativistische Geschwindigkeitsaddition: Zwei Raumschiffe A und B fliegen aus Sicht der Erde mit jeweils $v = 0{,}8c$ aufeinander zu. (a) Welche Geschwindigkeit hat B aus Sicht von A? Verwende $u = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 \cdot v_2/c^2)$. (b) Warum liefert die klassische Addition ein unsinniges Ergebnis? (c) Bestimme den Lorentzfaktor der Relativbewegung von A und B.

2 Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Auf den ersten Blick wirken manche plausibel – denke genau nach.

	richtig	falsch
Ein Photon besitzt trotz der Ruhemasse null einen Impuls $p = E/c$.	☐	☐
Bei der Längenkontraktion werden auch die Abmessungen senkrecht zur Bewegungsrichtung verkürzt.	☐	☐
Das Raumzeitintervall $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ zwischen zwei Ereignissen hat in allen Inertialsystemen denselben Wert.	☐	☐
Bei $v = 0{,}6c$ ist die kinetische Energie eines Teilchens genau $\frac{1}{2}mv^2$.	☐	☐
Zwei Ereignisse mit raumartigem Abstand ($\Delta x > c\Delta t$) können in einem Ursache-Wirkung-Zusammenhang stehen.	☐	☐
Wird ein Körper mit $v = 0{,}5c$ relativ zu einem Raumschiff abgeschossen, das selbst mit $0{,}5c$ fliegt, so bewegt er sich relativ zum Beobachter mit genau c.	☐	☐

3 Zwillingsparadoxon quantitativ: Ein Zwilling fliegt mit $v = 0{,}8c$ zu einem Stern, der im Ruhesystem der Erde 8 Lichtjahre entfernt ist, und sofort wieder zurück. Beschleunigungsphasen werden vernachlässigt. (a) Berechne die Reisedauer aus Sicht des Erdzwillings. (b) Berechne die Reisedauer für den Reisenden über die Zeitdilatation. (c) Berechne sie ein zweites Mal im Ruhesystem des Reisenden über die Längenkontraktion. Welchen Altersunterschied gibt es bei der Rückkehr?

4 Das Scheunenparadoxon: Ein Stab mit der Ruhelänge 10 m fliegt mit v = 0,8c durch eine Scheune mit der Ruhelänge 8 m. Die Scheune hat vorne und hinten je ein Tor. (a) Wie lang ist der Stab im Ruhesystem der Scheune, und passt er hinein? (b) Wie lang ist die Scheune im Ruhesystem des Stabes? Der Stab passt scheinbar nicht hinein. (c) Löse den scheinbaren Widerspruch auf.

5 Ein Elektron (Ruheenergie $m \cdot c^2 = 0{,}511$ MeV) wird in einem elektrischen Feld aus der Ruhe auf v = 0,99c beschleunigt. (a) Welche Beschleunigungsspannung ist nötig? (b) Welche Spannung würde die klassische Rechnung mit $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ ergeben? (c) Um welchen Faktor weichen die beiden Ergebnisse voneinander ab?

6 Ein Teilchen der Masse m hat die Gesamtenergie $E = 2 \cdot m \cdot c^2$. Welche Aussagen sind richtig? (Hinweis: $E^2 = (p \cdot c)^2 + (m \cdot c^2)^2$)

- ☐ Sein Impuls beträgt $p = \sqrt{3} \cdot m \cdot c$.
- ☐ Seine Geschwindigkeit beträgt $v = (\sqrt{3}/2) \cdot c \approx 0{,}87c$.
- ☐ Seine kinetische Energie ist genau so groß wie seine Ruheenergie.
- ☐ Sein Impuls beträgt $p = 2 \cdot m \cdot c$.
- ☐ Seine Geschwindigkeit beträgt v = 0,5c.

7 Kopfrechen- und Kurzaufgaben für Schnelle. Gib jeweils das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit an.

a) Bei welcher Geschwindigkeit v (in Einheiten von c) beträgt der Lorentzfaktor γ = 10? → _____

b) Ein Proton ($m \cdot c^2 = 938$ MeV) bewegt sich mit v = 0,866c (γ = 2). Wie groß ist seine kinetische Energie? → _____

c) Zwei Körper bewegen sich aus Sicht eines Beobachters mit je 0,5c aufeinander zu. Wie schnell bewegt sich einer relativ zum anderen? → _____

d) Eine Uhr bewegt sich mit v = 0,6c. Wie viel Zeit vergeht im Ruhesystem des Beobachters, während die Uhr 10 s anzeigt? → _____

8 Raumzeitintervall: Im Laborsystem finden zwei Ereignisse im Abstand Δt = 5,0 µs und Δx = 900 m statt. (a) Berechne $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ und entscheide, ob der Abstand zeitartig, raumartig oder lichtartig ist. (b) Bestimme die Eigenzeit $\tau = \sqrt{(\Delta s^2)}/c$. (c) Mit welcher Geschwindigkeit müsste sich ein Beobachter bewegen, für den beide Ereignisse am selben Ort stattfinden? Prüfe das Ergebnis mit der Zeitdilatation.

9 Zwei gleiche Teilchen der Ruhemasse m fliegen aus entgegengesetzten Richtungen mit je v = 0,6c aufeinander zu und verschmelzen vollständig inelastisch zu einem einzigen Teilchen. (a) Welche Geschwindigkeit hat das neue Teilchen? (b) Welche Ruhemasse M hat es? (c) Was bedeutet das Ergebnis für die „Erhaltung der Masse“?

10 Die Sonne strahlt eine Leistung von $P \approx 3{,}8 \cdot 10^{26}$ W ab. (a) Wie viel Masse verliert sie pro Sekunde? (b) Welchen Bruchteil ihrer Masse ($M \approx 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg) verliert sie dadurch in einer Milliarde Jahren (1 Mrd. a $\approx 3{,}15 \cdot 10^{16}$ s)? (c) Bewerte das Ergebnis: Ist die Massenabnahme für das Leben auf der Erde in diesem Zeitraum dramatisch?

11 Kausalität und Überlichtgeschwindigkeit: Angenommen, ein Signal könnte sich mit $u = 2c$ ausbreiten. Es wird bei Ereignis A ($x = 0$, $t = 0$) gesendet und kommt bei Ereignis B ($x = \Delta x$, $t = \Delta x/u$) an. (a) Berechne mithilfe der Lorentz-Transformation $\Delta t' = \gamma \cdot (\Delta t - v \cdot \Delta x / c^2)$, wie die Zeitdifferenz in einem Inertialsystem mit $v = 0{,}6c$ aussieht. (b) Welches Problem ergibt sich daraus? Beurteile damit, warum die Relativitätstheorie Signale schneller als c ausschließt.

12 Ist $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ größer als null, nennt man den Abstand zweier Ereignisse _____ . Bei $\Delta s^2 < 0$ heißt er _____ , bei $\Delta s^2 = 0$ _____ . Nur bei zeitartigem oder lichtartigem Abstand kann eines der Ereignisse das andere _____ .

13 Ordne jeder Gleichung ihre physikalische Bedeutung zu.

1. $E^2 = (p \cdot c)^2 + (m \cdot c^2)^2$	____	A) Energie-Impuls-Beziehung
2. $p = E/c$	____	B) Relativistisches Additionstheorem der Geschwindigkeiten
3. $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$	____	C) Invariantes Raumzeitintervall
4. $u = (v + w)/(1 + v \cdot w/c^2)$	____	D) Impuls eines Photons
5. $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$	____	E) Relativistische kinetische Energie

14 Forscheraufgabe: Der Doppler-Effekt des Lichts hängt bei bewegten Quellen auch von der Zeitdilatation ab. Erkläre, warum es selbst dann eine Frequenzverschiebung (der sogenannte transversale Doppler-Effekt) gibt, wenn sich die Quelle senkrecht zur Sichtlinie bewegt, während der klassische Doppler-Effekt dort keine Verschiebung vorhersagt. Wie verändert sich die beobachtete Frequenz qualitativ?

15 Diskussionsaufgabe: Jemand behauptet: „Wegen der Längenkontraktion wird ein schnell vorbeifliegender Würfel aus Sicht des Beobachters einfach als plattgedrückter Quader fotografiert.“ Nimm Stellung. Berücksichtige dabei, dass eine Fotografie das Licht erfasst, das gleichzeitig an der Kamera ankommt, aber zu verschiedenen Zeitpunkten von verschiedenen Punkten des Würfels ausgesendet wurde.

Lösungen

Spezielle Relativitätstheorie – Expertenaufgaben · Physik · Klasse 13

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/spezielle-relativitaetstheorie-klasse-13 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: (a) $u = (0{,}8c + 0{,}8c)/(1 + 0{,}8 \cdot 0{,}8) = 1{,}6c/1{,}64 \approx 0{,}976c$. (b) Klassisch ergäbe sich 1,6c, also mehr als die Lichtgeschwindigkeit. Das widerspricht dem zweiten Postulat, nach dem c eine obere Grenze für Geschwindigkeiten von Körpern und Signalen ist. Der Nenner $1 + v_1 v_2/c^2$ sorgt dafür, dass das Ergebnis immer kleiner als c bleibt. (c) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}976^2)} \approx 1/\sqrt{0{,}0482} \approx 1/0{,}2195 \approx 4{,}56$. Kontrolle: $\gamma_{rel} = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) = (1{,}667)^2 \cdot 1{,}64 \approx 4{,}56$.

Aufgabe 2: Ein Photon besitzt trotz der Ruhemasse null einen Impuls $p = E/c$. → **richtig**
Bei der Längenkontraktion werden auch die Abmessungen senkrecht zur Bewegungsrichtung verkürzt. → **falsch**
Das Raumzeitintervall $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ zwischen zwei Ereignissen hat in allen Inertialsystemen denselben Wert. → **richtig**
Bei $v = 0{,}6c$ ist die kinetische Energie eines Teilchens genau $\frac{1}{2}mv^2$. → **falsch**
Zwei Ereignisse mit raumartigem Abstand ($\Delta x > c\Delta t$) können in einem Ursache-Wirkung-Zusammenhang stehen. → **falsch**
Wird ein Körper mit $v = 0{,}5c$ relativ zu einem Raumschiff abgeschossen, das selbst mit 0,5c fliegt, so bewegt er sich relativ zum Beobachter mit genau c. → **falsch**

Aufgabe 3: (a) Gesamtstrecke 16 Lj, also $t = 16\ \text{Lj}/0{,}8c = 20$ Jahre. (b) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} = 1/0{,}6 \approx 1{,}667$. Eigenzeit des Reisenden: $\tau = t/\gamma = 20\ \text{a} \cdot 0{,}6 = 12$ Jahre. (c) Im Ruhesystem des Reisenden ist die Strecke zum Stern kontrahiert: $\ell = 8\ \text{Lj} \cdot 0{,}6 = 4{,}8$ Lj. Hin- und Rückweg zusammen sind 9,6 Lj, also $\tau = 9{,}6\ \text{Lj}/0{,}8c = 12$ Jahre. Beide Wege liefern dasselbe Ergebnis. Altersunterschied: 20 a − 12 a = 8 Jahre; der Reisende ist 8 Jahre jünger.

Aufgabe 4: (a) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}64)} \approx 1{,}667$. Im Scheunensystem ist der Stab kontrahiert: $\ell = 10\ \text{m}/1{,}667 = 6\ \text{m} < 8\ \text{m}$. Er passt hinein, beide Tore können kurzzeitig gleichzeitig geschlossen sein. (b) Im Stabsystem ist die Scheune kontrahiert: $\ell = 8\ \text{m}/1{,}667 = 4{,}8\ \text{m}$. Der 10 m lange Stab passt dort nie vollständig hinein. (c) Der Widerspruch löst sich über die Relativität der Gleichzeitigkeit auf. Das gleichzeitige Schließen beider Tore im Scheunensystem sind zwei Ereignisse, die im Stabsystem nicht gleichzeitig stattfinden. Im Stabsystem schließt das vordere Tor früher als das hintere. Zu keinem Zeitpunkt ist dort der ganze Stab zwischen geschlossenen Toren. Beide Beschreibungen sind in sich widerspruchsfrei. „Der Stab ist gleichzeitig ganz in der Scheune“ ist keine systemunabhängige Aussage.

Aufgabe 5: (a) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}99^2)} = 1/\sqrt{0{,}0199} \approx 7{,}09$. $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot mc^2 \approx 6{,}09 \cdot 0{,}511\ \text{MeV} \approx 3{,}11\ \text{MeV}$. Wegen $E_{kin} = e \cdot U$ ist $U \approx 3{,}11$ MV. (b) Klassisch: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot mc^2 \cdot (v/c)^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}511\ \text{MeV} \cdot 0{,}9801 \approx 0{,}250$ MeV, also $U \approx 0{,}25$ MV. (c) Faktor $\approx 3{,}11/0{,}250 \approx 12{,}4$. Die klassische Rechnung unterschätzt die nötige Energie bei dieser Geschwindigkeit also um mehr als eine Größenordnung. Die Differenz entsteht, weil die Energie bei $v \to c$ gegen unendlich wächst, während die Geschwindigkeit kaum noch zunimmt.

Aufgabe 6: Sein Impuls beträgt $p = \sqrt{3} \cdot m \cdot c$., Seine Geschwindigkeit beträgt $v = (\sqrt{3}/2) \cdot c \approx 0{,}87c$., Seine kinetische Energie ist genau so groß wie seine Ruheenergie.

Aufgabe 7: a) $v = c \cdot \sqrt{(1 - 1/100)} = c \cdot \sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995c$, b) $E_kin = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2 = 1 \cdot 938\ \text{MeV} = 938\ \text{MeV}$, c) $u = (0{,}5c + 0{,}5c)/(1 + 0{,}25) = 0{,}8c$, d) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}36)} = 1{,}25$, also $\Delta t = 1{,}25 \cdot 10\ \text{s} = 12{,}5\ \text{s}$

Aufgabe 8: (a) $c \cdot \Delta t = 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 1500\ \text{m}$. $\Delta s^2 = (1500\ \text{m})^2 - (900\ \text{m})^2 = 2{,}25 \cdot 10^6\ \text{m}^2 - 0{,}81 \cdot 10^6\ \text{m}^2 = 1{,}44 \cdot 10^6\ \text{m}^2 = (1200\ \text{m})^2$. Da $\Delta s^2 > 0$, ist der Abstand zeitartig, und ein ursächlicher Zusammenhang ist möglich. (b) $\tau = 1200\ \text{m}/(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}) = 4{,}0\ \mu\text{s}$. (c) Der Beobachter muss sich mit $v = \Delta x/\Delta t = 900\ \text{m}/5{,}0\ \mu\text{s} = 1{,}8 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 0{,}6c$ bewegen. Kontrolle: $\gamma = 1{,}25$, also $\Delta t/\gamma = 5{,}0\ \mu\text{s}/1{,}25 = 4{,}0\ \mu\text{s}$, was mit der Eigenzeit übereinstimmt.

Aufgabe 9: (a) Der Gesamtimpuls vor dem Stoß ist null (gleiche Massen, entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten). Wegen der Impulserhaltung ruht das neue Teilchen: $v = 0$. (b) $\gamma = 1/\sqrt{(1 - 0{,}36)} = 1{,}25$. Gesamtenergie vorher: $2 \cdot \gamma \cdot m \cdot c^2 = 2{,}5 \cdot m \cdot c^2$. Nachher ruht das Teilchen, also $E = M \cdot c^2$. Energieerhaltung liefert $M = 2{,}5 \cdot m$. (c) Die Ruhemasse M ist größer als die Summe der Ruhemassen (2m). Die Ruhemasse bleibt also nicht erhalten. Erhalten bleibt die Gesamtenergie. Die kinetische Energie der Teilchen ($0{,}5 \cdot m \cdot c^2$) wird in Ruhemasse umgewandelt. Das ist die Aussage von $E = m \cdot c^2$: Energie hat Trägheit, und jede Energieform trägt zur Masse eines Systems bei.

Aufgabe 10: (a) Aus $E = m \cdot c^2$ folgt $\Delta m/\Delta t = P/c^2 = 3{,}8 \cdot 10^{26}\ \text{W}/(9{,}0 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2) \approx 4{,}2 \cdot 10^9\ \text{kg/s}$, also etwa 4 Millionen Tonnen pro Sekunde. (b) $\Delta m = 4{,}2 \cdot 10^9\ \text{kg/s} \cdot 3{,}15 \cdot 10^{16}\ \text{s} \approx 1{,}3 \cdot 10^{26}\ \text{kg}$. Bruchteil: $1{,}3 \cdot 10^{26}\ \text{kg}/2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-5}$, also etwa 0,007 %. (c) Trotz der gewaltigen Zahl pro Sekunde ist der relative Massenverlust über eine Milliarde Jahre verschwindend klein. Die Sonne bleibt über diesen Zeitraum praktisch gleich schwer. Andere Veränderungen, etwa die langsame Helligkeitszunahme durch die Kernfusion, sind für das Leben auf der Erde bedeutsamer als der Masseverlust selbst.

Aufgabe 11: (a) $\Delta t = \Delta x/(2c)$. Es gilt $\Delta t' = \gamma \cdot (\Delta x/(2c) - 0{,}6c \cdot \Delta x/c^2) = \gamma \cdot \Delta x/c \cdot (0{,}5 - 0{,}6) = -0{,}1 \cdot \gamma \cdot \Delta x/c < 0$. Im bewegten System kommt das Signal also vor dem Absenden an ($\Delta t' < 0$). (b) In diesem System würde die Wirkung vor der Ursache eintreten. Das Kausalitätsprinzip wäre verletzt. Man könnte Paradoxien konstruieren, etwa eine Nachricht in die eigene Vergangenheit senden, die verhindert, dass sie gesendet wird. Weil das Relativitätsprinzip alle Inertialsysteme gleichberechtigt macht, kann ein solches Signal nicht ausgeschlossen werden, solange es existiert. Konsistent ist die Theorie nur, wenn sich keine Information schneller als c ausbreitet. Allgemein gilt: Für $u > c$ gibt es immer ein System mit $v < c$, in dem die Zeitreihenfolge umgekehrt ist.

Aufgabe 12: zeitartig, raumartig, lichtartig, verursachen

Aufgabe 13: 1 → A, 2 → D, 3 → C, 4 → B, 5 → E

Aufgabe 14: Klassisch hängt die Frequenzverschiebung nur von der Geschwindigkeitskomponente entlang der Sichtlinie ab. Bei rein senkrechter Bewegung wäre sie null. Relativistisch läuft die Uhr der bewegten Quelle aus Sicht des Beobachters langsamer. Die Zeit zwischen zwei emittierten Wellenbergen ist im Beobachtersystem um den Faktor γ größer als die Eigenperiode T_0 der Quelle. Daher gilt $f = f_0/\gamma$, wenn die Zeitdilatation allein wirkt. Die beobachtete Frequenz ist kleiner als f_0, das Licht ist also rotverschoben, obwohl die Quelle sich nicht auf den Beobachter zu- oder von ihm wegbewegt. Der Effekt ist rein relativistisch und ein direkter Test der Zeitdilatation. Er wurde mit schnell bewegten Ionen (Ives-Stilwell-Experiment) bestätigt.

Aufgabe 15: Die Behauptung ist so nicht korrekt. Die Längenkontraktion beschreibt die Länge, die man durch gleichzeitiges Messen der Endpunkte im Beobachtersystem erhält. Eine Fotografie erfasst aber das Licht, das gleichzeitig an der Kamera eintrifft. Dieses Licht wurde von weiter entfernten Punkten des Würfels früher ausgesendet als von näheren, weil es unterschiedlich lange Wege zurücklegen musste. Die Würfelpunkte befanden sich beim Aussenden also an verschiedenen Orten. Dieser Laufzeiteffekt überlagert die Längenkontraktion. Das Ergebnis ist, dass der Würfel auf dem Foto nicht verkürzt aussieht, sondern gedreht erscheint (Penrose-Terrell-Rotation): Man sieht zum Beispiel auch seine Rückseite teilweise. Für kleine Raumwinkel behält ein Objekt sogar seine Umrissform. Man muss also zwischen Messen (Länge im Bezugssystem) und Sehen oder Fotografieren (Lichtlaufzeiten) unterscheiden.