Spezielle Relativitätstheorie – Schritt für Schritt

Einsteins Postulate, Zeitdilatation, Längenkontraktion und Energie – mit Hilfen und Beispielen

So arbeitest du mit diesem Blatt: Die Aufgaben sind in kleine Schritte aufgeteilt. Vor vielen Aufgaben steht ein Hilfekasten mit Erklärungen und Tipps. Für die Lichtgeschwindigkeit nimmst du $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. Schreibe deinen Rechenweg auf und vergiss die Einheiten nicht. Bearbeitungszeit: ca. 90 Minuten. Du darfst deinen Taschenrechner benutzen.

HILFE: Wichtige Wörter. Inertialsystem = ein Bezugssystem, das sich gleichmäßig und geradlinig bewegt (es wird nicht schneller, langsamer oder gedreht). Postulat = eine Grundannahme, die man nicht beweist. Beobachter = jemand, der misst. Vakuum = leerer Raum ohne Luft. Tipp für die nächste Aufgabe: Es gibt zwei Postulate. Das erste handelt von den Naturgesetzen, das zweite von der Lichtgeschwindigkeit.

1 Ergänze die Sätze zu den beiden Einsteinschen Postulaten. 1. Postulat: „Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen …“ 2. Postulat: „Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen …“

HILFE: Eigenzeit = die Zeit, die eine Uhr misst, die mit dem Vorgang mitbewegt wird (also im Ruhesystem). Ruhemasse = die Masse eines Teilchens, wenn es ruht. Die Ruhemasse ändert sich nie. Gleichzeitig = zwei Ereignisse passieren im selben Moment. Tipp: Bewegte Uhren gehen aus Sicht eines ruhenden Beobachters langsamer.

2 Entscheide: wahr oder falsch?

	richtig	falsch
Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß.	☐	☐
Zwei Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, sind in jedem anderen Inertialsystem auch gleichzeitig.	☐	☐
Eine bewegte Uhr geht aus Sicht eines ruhenden Beobachters langsamer.	☐	☐
Die Eigenzeit ist die längste Zeit, die man zwischen zwei Ereignissen messen kann.	☐	☐
Die Ruhemasse eines Teilchens ist in allen Inertialsystemen gleich.	☐	☐
Ein Teilchen mit Masse kann durch genug Energie genau auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden.	☐	☐

HILFE: Der Lorentzfaktor γ (sprich: „Gamma“) zeigt, wie stark relativistische Effekte sind. Formel: $\gamma = 1 / \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$. Bei kleiner Geschwindigkeit ist γ fast 1. Je näher v an c kommt, desto größer wird γ. Die Eigenzeit wird im Ruhesystem gemessen. Die Ruhelänge ist die Länge eines Objekts, wenn es ruht. Wörter zum Einsetzen: Lorentzfaktor, größer, Eigenzeit, Ruhelänge.

3 Der Faktor $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ heißt _____ . Er ist für $v > 0$ immer _____ als 1. Die Zeit zwischen zwei Ereignissen, die im Ruhesystem gemessen wird, heißt _____ . Die Länge eines Objekts, die im Ruhesystem gemessen wird, heißt _____ .

GELÖSTES BEISPIEL: Berechne γ für $v = 0{,}6c$. Schritt 1: v/c einsetzen: $v^2/c^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$. Schritt 2: $1 - 0{,}36 = 0{,}64$. Schritt 3: Wurzel ziehen: $\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Schritt 4: $\gamma = 1 / 0{,}8 = 1{,}25$. Ergebnis: $\gamma = 1{,}25$. Nach diesem Muster rechnest du die nächsten Aufgaben.

4 Berechne den Lorentzfaktor γ (auf zwei Nachkommastellen runden). Tipp: Rechne in den Schritten $v^2/c^2 \rightarrow 1 - v^2/c^2 \rightarrow$ Wurzel $\rightarrow$ 1 geteilt durch das Ergebnis.

a) $v = 0{,}1c \rightarrow$ _____

b) $v = 0{,}5c \rightarrow$ _____

c) $v = 0{,}9c \rightarrow$ _____

d) $v = 0{,}99c \rightarrow$ _____

5 Ein Raumschiff fliegt mit v = 0,8c. Wie groß ist γ? (Tipp: $0{,}8^2 = 0{,}64$. Dann $1 - 0{,}64 = 0{,}36$. Dann $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.)

- ☐ $\gamma \approx 1{,}25$
- ☐ $\gamma \approx 1{,}67$
- ☐ $\gamma \approx 0{,}60$
- ☐ $\gamma \approx 2{,}29$

HILFE: Zeitdilatation = „Zeit-Dehnung“. Aus Sicht der Erde läuft die Zeit für das schnelle Myon langsamer. Die Erde misst deshalb eine längere Zeit als das Myon selbst. Formel: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$. Dabei ist Δt_0 die Eigenzeit (vom Myon gemessen) und Δt die Zeit im Erdsystem. Strecke: $s = v \cdot t$. Ein Myon ist ein kleines Teilchen, das nur sehr kurz lebt. Aufgabe: Ein Myon fliegt mit v = 0,995c. Seine Eigenlebensdauer ist $\tau_0 = 2{,}2\ \mu s$ ($1\ \mu s = 10^{-6}\ s$).

6 Teil a) Berechne den Lorentzfaktor γ für v = 0,995c. (Tipp: $0{,}995^2 = 0{,}990025$. Rechne dann $1 - 0{,}990025$ und ziehe die Wurzel.)

7 Teil b) Berechne die Lebensdauer des Myons aus Sicht der Erde. Satzanfang: „Aus Sicht der Erde lebt das Myon …“ (Formel: $\Delta t = \gamma \cdot \tau_0$)

8 Teil c) Berechne die Strecke, die das Myon im Erdsystem in dieser Zeit zurücklegt. (Tipp: $v = 0{,}995 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ m/s \approx 2{,}985 \cdot 10^8\ m/s$. Wandle 22 µs in Sekunden um: $22 \cdot 10^{-6}\ s$. Dann $s = v \cdot \Delta t$.)

HILFE: Längenkontraktion = „Längen-Verkürzung“. Ein Objekt, das sich schnell bewegt, erscheint in Bewegungsrichtung kürzer. Formel: $\ell = \ell_0 / \gamma$. Dabei ist ℓ_0 die Ruhelänge. Aus Sicht des Myons bewegt sich die Erde mit der Atmosphäre auf das Myon zu. Satzanfänge für die nächste Aufgabe: „Im Ruhesystem des Myons vergeht nur die Zeit …“, „Die Strecke durch die Atmosphäre wird …“, „Der Effekt heißt …“

9 Beschreibe den Myon-Versuch aus Sicht des Myons. Beantworte dazu: (1) Welche Zeit vergeht für das Myon? (2) Was passiert mit der Strecke durch die Atmosphäre? (3) Wie heißt dieser Effekt?

10 Ordne jedem Begriff die passende Formel zu. (Tipp: Fange mit den Formeln an, die du schon kennst: Zeitdilatation und Längenkontraktion.)

1. Zeitdilatation	____	A) $E_0 = m \cdot c^2$
2. Längenkontraktion	____	B) $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$
3. Gesamtenergie	____	C) $\ell = \ell_0 / \gamma$
4. Ruheenergie	____	D) $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$
5. Impuls (relativistisch)	____	E) $p = \gamma \cdot m \cdot v$

HILFE: Ruheenergie $E_0 = m \cdot c^2$ ist die Energie, die ein Teilchen schon im Ruhezustand hat. Gesamtenergie $E = \gamma \cdot E_0$ ist die Energie bei Bewegung. Kinetische Energie (Bewegungsenergie) $E_{kin} = E - E_0$. Umrechnung: 1 MeV = $1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J, also Energie in MeV = Energie in J geteilt durch $1{,}602 \cdot 10^{-13}$. Aufgabe: Ein Elektron ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg) fliegt mit $v = 0{,}98c$. Rechne in 4 Schritten.

11 Teil a) Berechne γ für $v = 0{,}98c$. (Tipp: $0{,}98^2 = 0{,}9604$. Dann $1 - 0{,}9604 = 0{,}0396$. Dann Wurzel ziehen und 1 durch das Ergebnis teilen.)

12 Teil b) Berechne die Ruheenergie $E_0 = m \cdot c^2$ in Joule und in MeV. (Tipp: $c^2 = (3{,}0 \cdot 10^8)^2 = 9{,}0 \cdot 10^{16}$ m²/s².)

13 Teil c) Berechne die Gesamtenergie $E = \gamma \cdot E_0$ in Joule und in MeV.

14 Teil d) Berechne die kinetische Energie $E_{kin} = E - E_0$ in Joule und in MeV.

HILFE: Wenn v immer näher an c kommt, wird v^2/c^2 fast 1. Dann wird $1 - v^2/c^2$ fast 0. Teilt man durch eine Zahl, die fast 0 ist, wird das Ergebnis riesig. Darum wird γ unendlich groß, wenn v gegen c geht. Und weil $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$ gilt, wird auch die Energie unendlich groß. Wähle alle richtigen Antworten aus (es können mehrere sein).

15 Warum kann ein Teilchen mit Masse die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen?

- ☐ Wenn v gegen c geht, wird γ unendlich groß.
- ☐ Die nötige Energie zum Beschleunigen würde unendlich groß werden.
- ☐ Die Ruhemasse des Teilchens würde negativ werden.
- ☐ Der Impuls $p = \gamma \cdot m \cdot v$ würde unbegrenzt wachsen.
- ☐ Die Lichtgeschwindigkeit ist nur für Photonen definiert.

HILFE: Zwillingsparadoxon. Ein Zwilling fliegt schnell zu einem Stern und wieder zurück. Der andere bleibt auf der Erde. Der Erdzwilling bleibt die ganze Zeit in einem Inertialsystem. Der Reisezwilling muss am Stern umkehren, dabei ändert er seine Bewegungsrichtung (er wird beschleunigt). Er wechselt also das Inertialsystem. Satzanfänge: „Aus Sicht der Erde geht die Uhr des Reisenden …“, „Die Situation ist nicht symmetrisch, weil …“

16 Teil a) Welcher Zwilling ist bei der Rückkehr jünger? Begründe mit der Zeitdilatation.

17 Teil b) Der scheinbare Widerspruch: Aus Sicht des Reisezwillings bewegt sich doch die Erde. Müsste dann nicht der Erdzwilling jünger sein? Erkläre, warum das nicht so ist.

HILFE: Die spezielle Relativitätstheorie wurde in Experimenten bestätigt. Zwei Beispiele als Stichwörter: (1) Myonen aus der kosmischen Strahlung (Teilchen aus dem Weltall) erreichen die Erdoberfläche. (2) Atomuhren in Flugzeugen (Hafele-Keating-Experiment) gehen anders als Atomuhren am Boden.

18 Wähle zwei Experimente aus der Hilfe. Beschreibe jedes in ein bis zwei Sätzen: Was wurde gemessen? Was zeigt das?

Lösungen

Spezielle Relativitätstheorie – Schritt für Schritt · Physik · Klasse 13

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/spezielle-relativitaetstheorie-klasse-13 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: 1. Postulat (Relativitätsprinzip): Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich (haben dieselbe Form). Es gibt kein besonderes, bevorzugtes Inertialsystem. 2. Postulat (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit): Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich groß (c). Das gilt unabhängig davon, wie sich die Lichtquelle oder der Beobachter bewegt.

Aufgabe 2: Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß. → **richtig**
Zwei Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, sind in jedem anderen Inertialsystem auch gleichzeitig. → **falsch**
Eine bewegte Uhr geht aus Sicht eines ruhenden Beobachters langsamer. → **richtig**
Die Eigenzeit ist die längste Zeit, die man zwischen zwei Ereignissen messen kann. → **falsch**
Die Ruhemasse eines Teilchens ist in allen Inertialsystemen gleich. → **richtig**
Ein Teilchen mit Masse kann durch genug Energie genau auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. → **falsch**

Aufgabe 3: Lorentzfaktor, größer, Eigenzeit, Ruhelänge

Aufgabe 4: a) $\gamma \approx 1{,}01$, b) $\gamma \approx 1{,}15$, c) $\gamma \approx 2{,}29$, d) $\gamma \approx 7{,}09$

Aufgabe 5: $\gamma \approx 1{,}67$

Aufgabe 6: $v^2/c^2 = 0{,}995^2 = 0{,}990025$. $1 - 0{,}990025 = 0{,}009975$. $\sqrt{0{,}009975} \approx 0{,}09987$. $\gamma = 1 / 0{,}09987 \approx 10{,}01$.

Aufgabe 7: $\Delta t = \gamma \cdot \tau_0 \approx 10{,}01 \cdot 2{,}2\ \mu s \approx 22\ \mu s$. Aus Sicht der Erde lebt das Myon also etwa 22 µs, das ist ungefähr zehnmal so lange wie seine Eigenlebensdauer.

Aufgabe 8: $v = 0{,}995 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s $\approx 2{,}985 \cdot 10^8$ m/s. $s = v \cdot \Delta t \approx 2{,}985 \cdot 10^8$ m/s $\cdot\ 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ s $\approx 6{,}6 \cdot 10^3$ m $\approx$ 6,6 km. Das Myon kommt also trotz seiner kurzen Eigenlebensdauer bis zur Erdoberfläche. Das ist ein Beleg für die Zeitdilatation.

Aufgabe 9: (1) Im Ruhesystem des Myons vergeht nur die Eigenlebensdauer $\tau_0 = 2{,}2\ \mu s$. Es gibt dort keine Zeitdilatation. (2) Die Strecke durch die Atmosphäre ist für das Myon verkürzt: $\ell = \ell_0/\gamma$. Sie ist etwa zehnmal kürzer ($\gamma \approx 10$). (3) Der Effekt heißt Längenkontraktion. Deshalb schafft das Myon die kurze Strecke in seiner Eigenlebensdauer. Beide Sichtweisen (Erde und Myon) führen zum gleichen Ergebnis.

Aufgabe 10: 1 → B, 2 → C, 3 → D, 4 → A, 5 → E

Aufgabe 11: $v^2/c^2 = 0{,}98^2 = 0{,}9604$. $1 - 0{,}9604 = 0{,}0396$. $\sqrt{0{,}0396} \approx 0{,}1990$. $\gamma = 1 / 0{,}1990 \approx 5{,}03$ (genauer 5,025).

Aufgabe 12: $E_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg $\cdot\ 9{,}0 \cdot 10^{16}$ m²/s² $\approx 8{,}20 \cdot 10^{-14}$ J. Umrechnung: $8{,}20 \cdot 10^{-14}$ J / $1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J/MeV ≈ 0,512 MeV.

Aufgabe 13: $E = \gamma \cdot E_0 \approx 5{,}025 \cdot 8{,}20 \cdot 10^{-14}\ J \approx 4{,}12 \cdot 10^{-13}\ J$. In MeV: $4{,}12 \cdot 10^{-13} / 1{,}602 \cdot 10^{-13} \approx 2{,}57$ MeV.

Aufgabe 14: $E_kin = E - E_0 \approx 4{,}12 \cdot 10^{-13}\ J - 0{,}82 \cdot 10^{-13}\ J \approx 3{,}30 \cdot 10^{-13}\ J$. In MeV: 2,57 MeV − 0,512 MeV ≈ 2,06 MeV.

Aufgabe 15: Wenn v gegen c geht, wird γ unendlich groß., Die nötige Energie zum Beschleunigen würde unendlich groß werden., Der Impuls $p = \gamma \cdot m \cdot v$ würde unbegrenzt wachsen.

Aufgabe 16: Der Reisezwilling ist jünger. Aus Sicht der Erde ist er schnell unterwegs, deshalb geht seine Uhr langsamer (Zeitdilatation). Für ihn vergeht weniger Zeit, er altert weniger.

Aufgabe 17: Die beiden Zwillinge sind nicht gleichberechtigt. Der Erdzwilling bleibt die ganze Zeit in einem einzigen Inertialsystem. Der Reisezwilling kehrt am Stern um, er wird beschleunigt und wechselt dabei das Inertialsystem. Wegen dieser Asymmetrie darf man die Rollen nicht einfach vertauschen. Das Ergebnis ist eindeutig: Der Reisezwilling ist jünger.

Aufgabe 18: 1. Myonen: Myonen aus der Höhenstrahlung leben nur sehr kurz, erreichen aber trotzdem die Erdoberfläche. Das geht nur wegen der Zeitdilatation (bzw. der Längenkontraktion aus Sicht des Myons). 2. Hafele-Keating-Experiment: Atomuhren wurden in Flugzeugen mitgeflogen. Danach zeigten sie eine messbar andere Zeit als Uhren am Boden. Das stimmt mit der relativistischen Zeitdilatation überein.