Winkel an Geradenkreuzungen und im Dreieck – Zusatz- und Expertenaufgaben

Knobelaufgaben, Transfer und Beweise für Schnelldenker

Diese Aufgaben sind ZUSATZAUFGABEN für alle, die mit dem Arbeitsblatt bereits fertig sind. Sie sind deutlich anspruchsvoller: Du musst Wissen auf neue Situationen übertragen, Behauptungen begründen oder widerlegen, Beweise führen und knifflige Konstellationen durchdenken. Nimm dir Zeit, skizziere die Figuren und arbeite sauber mit den Winkelsätzen.

1 Drei Geraden schneiden sich alle in einem einzigen Punkt und erzeugen dadurch sechs Winkel um diesen Punkt. Einer der Winkel beträgt 35°, ein benachbarter Winkel 70°. Bestimme alle sechs Winkel, wenn bekannt ist, dass sich gegenüberliegende Winkel Scheitelwinkel sind. Begründe dein Vorgehen Schritt für Schritt.

2 Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Außenwinkel an der Spitze (dem Winkel zwischen den beiden gleich langen Schenkeln) von 140°. Bestimme alle Innenwinkel des Dreiecks und begründe, warum das Dreieck tatsächlich gleichschenklig zu diesen Winkeln passt.

3 Zwei parallele Geraden g und h werden von zwei verschiedenen Transversalen t1 und t2 geschnitten, sodass ein Viereck zwischen den Parallelen entsteht. Erkläre mithilfe von Stufen- und Wechselwinkeln, warum die Winkelsumme in diesem Viereck 360° beträgt, obwohl du nur die Winkelsumme im Dreieck (180°) als bekannt voraussetzt.

4 In einem Dreieck ist der Außenwinkel am Punkt A doppelt so groß wie der Innenwinkel bei A. Welche Aussage ist korrekt?

- ☐ Der Innenwinkel bei A beträgt 60°, da Innen- und Außenwinkel sich zu 180° ergänzen und der Außenwinkel doppelt so groß ist.
- ☐ Der Innenwinkel bei A beträgt 90°, weil Innen- und Außenwinkel immer gleich groß sein müssen.
- ☐ Diese Situation ist bei keinem Dreieck möglich.
- ☐ Der Außenwinkel beträgt 180°, weil er doppelt so groß wie 90° ist.

5 Forscheraufgabe: Zeige allgemein (mit Variablen), dass die Summe der drei Außenwinkel eines beliebigen Dreiecks immer 360° beträgt – unabhängig von der Form des Dreiecks. Nutze dabei die Innenwinkelsumme und die Eigenschaft von Nebenwinkeln.

6 Knobelaufgabe: Ein Winkel α an einer Geradenkreuzung ist um 20° größer als sein Nebenwinkel β. Gleichzeitig ist bekannt, dass eine dritte Gerade durch den Schnittpunkt verläuft und mit einer der beiden ursprünglichen Geraden einen Winkel von 15° einschließt, der genau in der Mitte von α liegt (also α durch diese Gerade halbiert würde, wenn sie durch den Winkel α verläuft, was hier aber nicht der Fall ist – die dritte Gerade schneidet β). Bestimme α und β. Begründe jeden Rechenschritt.

7 Anspruchsvolle Transfer-Aussagen: Entscheide, ob wahr oder falsch, und sei besonders kritisch bei Formulierungen.

	richtig	falsch
Wenn zwei Geraden von einer Transversalen geschnitten werden und ein Paar Wechselwinkel gleich groß ist, dann sind die beiden Geraden zwangsläufig parallel.	☐	☐
In jedem Dreieck ist der größte Außenwinkel immer dem kleinsten Innenwinkel gegenüber zugeordnet.	☐	☐
Ein Dreieck kann zwei stumpfe Innenwinkel haben, wenn der dritte Winkel sehr klein ist.	☐	☐
Die Winkelsumme eines beliebigen Vierecks lässt sich stets aus der Dreieckswinkelsumme herleiten, indem man eine Diagonale einzeichnet.	☐	☐

8 Expertenaufgabe: In einem Dreieck ABC gilt α : β : γ = 2 : 3 : 4. Zusätzlich wird bei C eine Gerade gezogen, die parallel zu AB verläuft. Berechne alle Innenwinkel des Dreiecks und bestimme anschließend die beiden Winkel, die die parallele Gerade bei C mit den Seiten CA und CB einschließt.

9 Bewertungsaufgabe: Ein Mitschüler behauptet: 'Scheitelwinkel und Stufenwinkel sind eigentlich dasselbe, nur mit anderem Namen, weil beide immer gleich groß sind.' Nimm begründet Stellung zu dieser Aussage und erkläre den entscheidenden Unterschied zwischen beiden Winkelarten.

Lösungen

Winkel an Geradenkreuzungen und im Dreieck – Zusatz- und Expertenaufgaben · Mathematik · Klasse 8

Für dich als Lehrkraft: leichtere Fassung in einer Minute

QR scannen oder lehreule.de/anpassen/winkel-an-geradenkreuzungen-klasse-8 öffnen: kostenloses Konto, dann schreibt Lehreule die leichtere Fassung mit Hilfen — oder Zusatzaufgaben für Schnelle, eine Word-Datei, einen QR-Code für die Klasse.

Aufgabe 1: Um einen Punkt liegen 6 Winkel, deren Summe 360° beträgt. Gegenüberliegende Winkel (im Abstand von 3 Positionen) sind Scheitelwinkel und daher gleich groß. Es gibt also 3 Paare gleich großer Winkel.

Gegeben: ein Winkel = 35°, benachbarter Winkel = 70°.
Scheitelwinkel von 35° ist ebenfalls 35°.
Scheitelwinkel von 70° ist ebenfalls 70°.

Die Summe aller 6 Winkel ist 360°, also: $2 \cdot 35° + 2 \cdot 70° + 2 \cdot x = 360°$
$70° + 140° + 2x = 360°$
$2x = 150°$
$x = 75°$

Die sechs Winkel (der Reihe nach um den Punkt) sind: 35°, 70°, 75°, 35°, 70°, 75°.
Probe: 35+70+75+35+70+75 = 360° ✓

Aufgabe 2: Der Außenwinkel an der Spitze beträgt 140°, also ist der zugehörige Innenwinkel (Spitzenwinkel) $\alpha = 180° - 140° = 40°$.

Da das Dreieck gleichschenklig ist, sind die beiden Basiswinkel β und γ gleich groß.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$40° + 2\beta = 180°$
$2\beta = 140°$
$\beta = \gamma = 70°$

Die Innenwinkel sind: 40°, 70°, 70°.
Da β = γ = 70°, liegen den beiden gleichen Winkeln gleich lange Seiten gegenüber – das bestätigt, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 3: Man kann das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Jedes Dreieck hat eine Innenwinkelsumme von 180° (dies folgt aus den Wechselwinkeln an Parallelen, wie im Grundarbeitsblatt gezeigt).

Da die Diagonale beide Dreiecke gemeinsam durchläuft, setzen sich die vier Innenwinkel des Vierecks aus den sechs Dreieckswinkeln zusammen, wobei die beiden Winkel an der Diagonale innerhalb des Vierecks zusammengefasst werden (sie addieren sich zu den jeweiligen Viereckswinkeln).

Summe der Winkel beider Dreiecke: 180° + 180° = 360°.
Da keine Winkel außerhalb des Vierecks liegen und die Diagonale das Viereck vollständig in die zwei Dreiecke teilt, ist die Winkelsumme des Vierecks genau die Summe beider Dreieckswinkelsummen: 360°.

Dies zeigt: Die Viereckssumme lässt sich direkt aus der bekannten Dreieckssumme herleiten, unabhängig davon, dass die Seiten durch Parallelen und Transversalen gebildet werden.

Aufgabe 4: Der Innenwinkel bei A beträgt 60°, da Innen- und Außenwinkel sich zu 180° ergänzen und der Außenwinkel doppelt so groß ist.

Aufgabe 5: Seien α, β, γ die Innenwinkel des Dreiecks mit α + β + γ = 180°.

Jeder Außenwinkel ist der Nebenwinkel zum zugehörigen Innenwinkel, da Innen- und Außenwinkel an einer Dreiecksecke auf einer Geraden liegen:
Außenwinkel bei A: α' = 180° − α
Außenwinkel bei B: β' = 180° − β
Außenwinkel bei C: γ' = 180° − γ

Summe der Außenwinkel:
α' + β' + γ' = (180° − α) + (180° − β) + (180° − γ)
= 540° − (α + β + γ)
= 540° − 180°
= 360°

Da dies für beliebige Werte von α, β, γ gilt, solange α + β + γ = 180° ist, gilt die Aussage für jedes beliebige Dreieck – unabhängig von seiner Form.

Aufgabe 6: α und β sind Nebenwinkel, daher gilt: α + β = 180°.
Gegeben: α = β + 20°

Einsetzen:
(β + 20°) + β = 180°
2β + 20° = 180°
2β = 160°
β = 80°

Damit: α = 80° + 20° = 100°

Probe: α + β = 100° + 80° = 180° ✓

(Die Information zur dritten Geraden mit 15° dient hier nur als zusätzlicher, für die Berechnung von α und β nicht notwendiger Kontext – wichtig war allein die Nebenwinkelbeziehung.)

Aufgabe 7: Wenn zwei Geraden von einer Transversalen geschnitten werden und ein Paar Wechselwinkel gleich groß ist, dann sind die beiden Geraden zwangsläufig parallel. → **richtig**
In jedem Dreieck ist der größte Außenwinkel immer dem kleinsten Innenwinkel gegenüber zugeordnet. → **falsch**
Ein Dreieck kann zwei stumpfe Innenwinkel haben, wenn der dritte Winkel sehr klein ist. → **falsch**
Die Winkelsumme eines beliebigen Vierecks lässt sich stets aus der Dreieckswinkelsumme herleiten, indem man eine Diagonale einzeichnet. → **richtig**

Aufgabe 8: Verhältnis α : β : γ = 2 : 3 : 4, Summe der Teile: 2+3+4 = 9 Teile = 180°
Ein Teil = 180° / 9 = 20°

α = 2 · 20° = 40°
β = 3 · 20° = 60°
γ = 4 · 20° = 80°

Probe: 40° + 60° + 80° = 180° ✓

Die Gerade durch C parallel zu AB erzeugt mit CA einen Wechselwinkel zum Winkel α (bei A): dieser Winkel beträgt also 40°.
Mit CB erzeugt sie einen Wechselwinkel zum Winkel β (bei B): dieser Winkel beträgt also 60°.

Probe am Punkt C: 40° + γ + 60° = 40° + 80° + 60° = 180° (gestreckter Winkel entlang der parallelen Geraden) ✓

Aufgabe 9: Die Aussage ist nicht korrekt, auch wenn beide Winkelarten gleich groß sein können.

Scheitelwinkel entstehen an EINER Geradenkreuzung – es sind die sich gegenüberliegenden Winkel von zwei sich schneidenden Geraden. Sie sind IMMER gleich groß, unabhängig davon, in welchem Winkel sich die Geraden schneiden.

Stufenwinkel entstehen dagegen, wenn ZWEI Geraden von einer Transversalen geschnitten werden. Stufenwinkel liegen an verschiedenen Schnittpunkten, auf derselben Seite der Transversalen und in 'entsprechender' Lage. Sie sind NUR dann gleich groß, wenn die beiden geschnittenen Geraden PARALLEL sind. Sind die Geraden nicht parallel, sind die Stufenwinkel unterschiedlich groß.

Der entscheidende Unterschied: Scheitelwinkel sind an einem einzigen Schnittpunkt immer gleich groß (ohne Bedingung), während Stufenwinkel nur unter der Bedingung der Parallelität gleich groß sind.